



Un schéma eulérien direct pour les écoulements hydrodynamiques multi matériaux ou multi fluides



Jean-Philippe Braeunig, Benoît Desjardins, Jean-Michel Ghidaglia,
Laboratoire de Recherche Conventionné ENS Cachan - CEA DAM.



31 janvier 2007

Document de présentation des activités scientifiques du CMLA

Mécanique des fluides réels au CMLA

Modélisation, Calcul scientifique & Prototypage virtuel

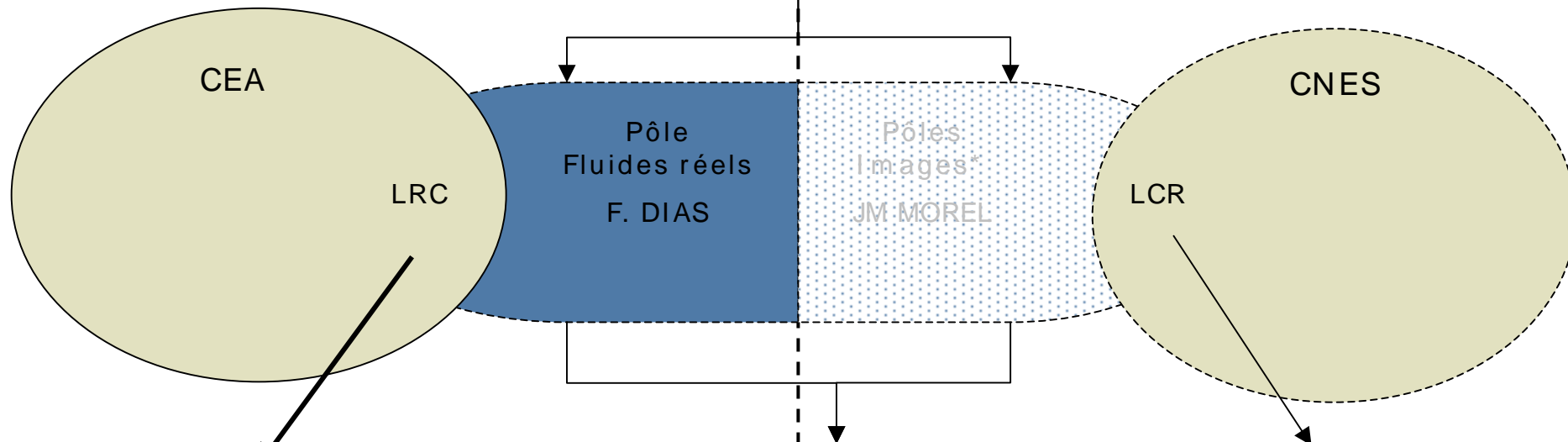
Centre de Mathématiques et de Leurs Applications
ENS-CACHAN
Janvier 2007



mfr@cmla.ens-cachan.fr

+331 47 40 74 29

Le CMLA est structuré autour de deux pôles thématiques mobilisant près de 80 personnes dont une moitié de doctorants



Laboratoire de Recherche Conventionné dirigé par Daniel BOUCHE axé sur les approches mésoscopiques

- ▶ Démarrage en juin 2005
- ▶ Co-financé par le CEA
- ▶ Rôle: Faire remonter vers le pôle Fluides du CMLA un gisement de nouveaux problèmes à traiter en collaboration avec le CEA

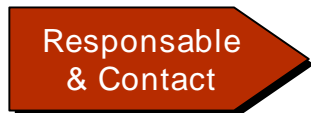
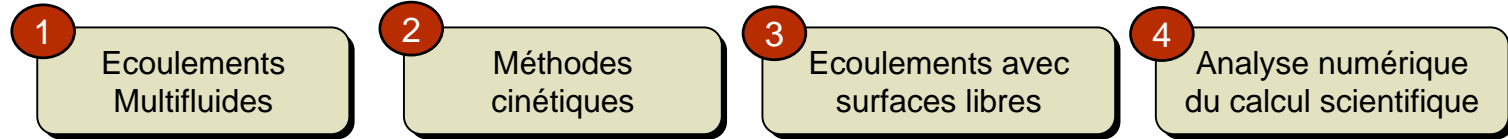
Quelques chiffres

- ▶ 80 personnes dont presque une moitié de thésards répartis équitablement entre les deux pôles
- ▶ Près de 500 publications parus et acceptées entre 2000 et 2004
- ▶ 25 contrats industriels entre 2000 et 2004
- ▶ 6 brevets entre 2000 et 2004
- ▶ 500 K€ de budget annuel (non consolidé)

Laboratoire Commun de Recherche en cours de création sur la base des partenariats déjà très importants entre le CMLA et le CNES

* Le pôle Images n'est pas présenté dans ce document

Au sein du pôle de mécanique des fluides, quatre équipes de recherche couvrent un large périmètre



▶ Jean Michel GHIDAGLIA

▶ Laurent DESVILLETES

▶ Frédéric DIAS

▶ Frédéric PASCAL

Projets industriels récents

- ▶ Ballotement dans les cuves de méthaniers
- ▶ Optimisation Multi-Objectif pour le Design de Systèmes Complexes
- ▶ Ecoulements multi-canaux
- ▶ Fluttering en aéronautique
- ▶ Ecoulements dans les pipelines enfouis
- ▶ Ecoulements gaz-particules
- ▶ Murs anti-bruits
- ▶ Ecoulements dans les poumons
- ▶ ...



Mots clefs thématiques

Volumes finis écoulements surfaces libres
vagues extrêmes Tsunamis conditions aux limites équations
cinétiques Multi-phasique Galerkin schémas numériques
Navier Stokes ...

La spécificité du CMLA consiste à être présent sur toute la chaîne de modélisation grâce à des collaborations internes et en partenariat permanent avec ceux qui ont posé le problème

Un exemple de collaboration industrielle et inter-équipes

► Etape 1: Demande d'expertise

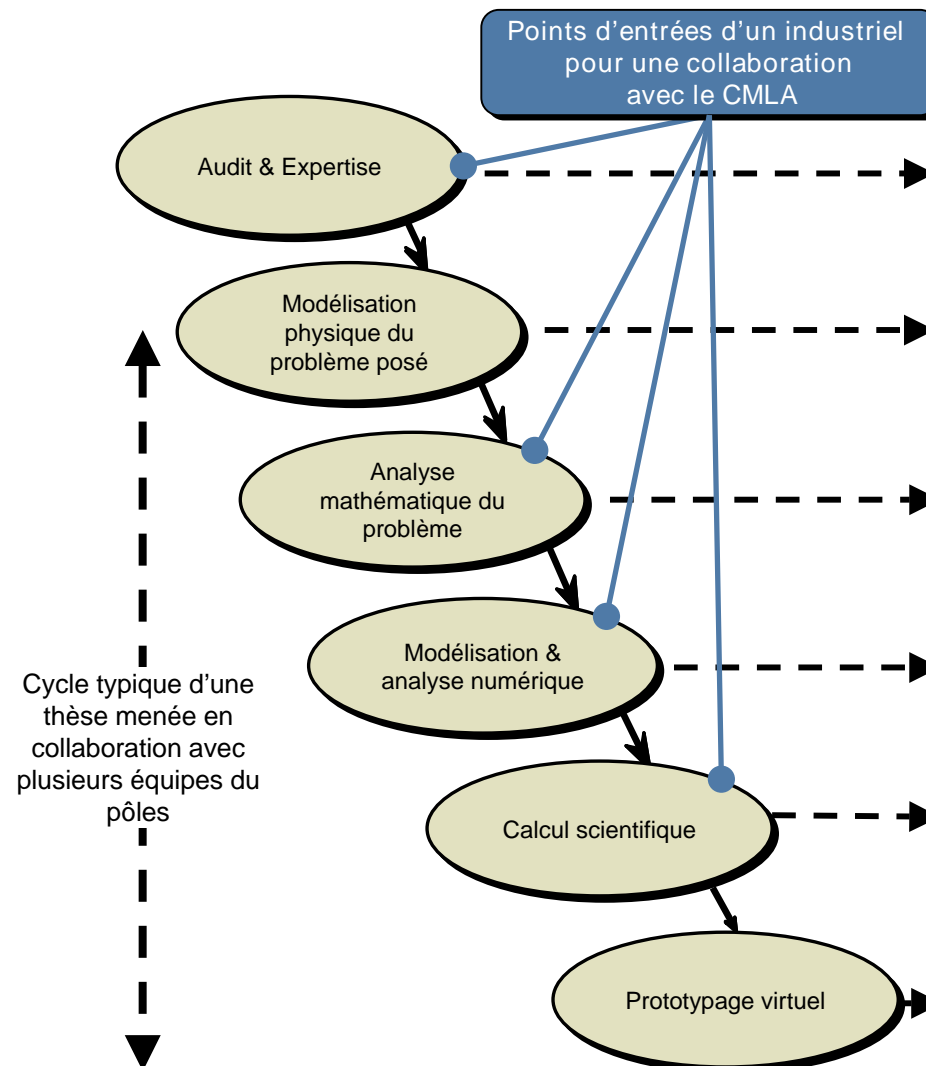
Le CEA DAM a sollicité le CMLA pour introduire dans leur code des phénomènes complexes liés à la coalescence, la collision et la fragmentation dans un type d'aérosols spécifique

► Etape 2: Recrutement de doctorants

Le CMLA et le CEA pour sélectionner deux étudiants. Les thèses sont co-cadrées et les financements proviennent du CEA et/ou du ministère.

► Etape 3: Spectre des travaux

- Étude qualitative des modèles mathématiques
- Programmation effective des méthodes proposées
- Intégration au code du CEA
- Résultats de cas tests académiques
- Résultats de production

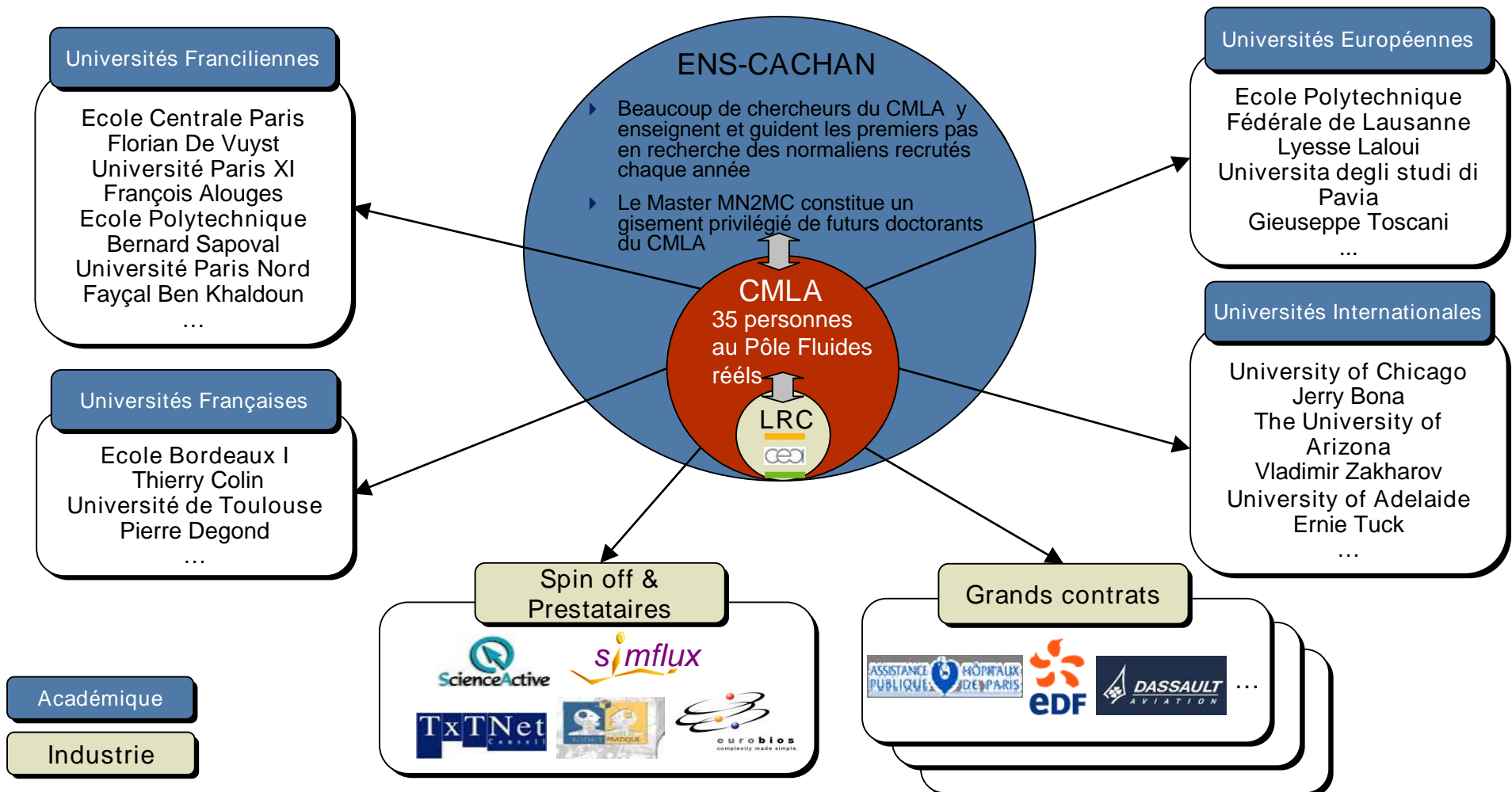


Rôles du CMLA

- Fonctionnant sur le modèle d'un institut, les quatre équipes du pôle Fluides réels collaborent ensemble pour couvrir toute la problématique posée
- Le CMLA fait appel, si besoin est, à d'autres compétences au sein de laboratoires partenaires pour répondre à des problématiques interdisciplinaires (laboratoires de biologie, médecine, mécanique, physique)
- Sur de gros projets industriels, le CMLA coordonne des équipes interdisciplinaires et conduit les projets avec les ressources disponibles chez les industriels
- Obtention de résultats directement opérationnels

L'étendue du réseau scientifique pérenne tissé autour des équipes du CMLA démontre une orientation très industrielle et fortement interdisciplinaire dépassant le strict cadre des maths appliquées

Principales collaborations académiques et grands contrats industriels



Equipe Ecoulements Multifluides dirigée par Jean-Michel GHIDAGLIA



Projets en cours

- ▶ Transition modèles gaz-particules vers fluide-fluide
- ▶ Ballotement de fluides dans les cuves de méthaniers
- ▶ Solveurs multi matériaux avec interfaces d'épaisseur nulle
- ▶ Écoulements dans des pipelines enfouis
- ▶ Développement d'une plate-forme de simulation d'écoulements compressibles complexes

1

Écoulements Multifluides

Applications industrielles

- ▶ Écoulements diphasiques
- ▶ Écoulement eau-vapeur
- ▶ Fluides réels



Travaux théoriques et interdisciplinaires

- ▶ Solveurs volumes finis pour les équations dispersives
- ▶ Modèles d'agents pour les propriétés macroscopiques des matériaux
- ▶ Correcteurs géométriques pour étudier l'ordre de convergence des schémas volumes finis
- ▶ Existence de solutions faibles pour les modèles bifluides



jean-michel.ghidaglia@cmla.ens-cachan.fr

Equipe Méthodes Cinétiques dirigée par Laurent DESVILLETES

2

Méthodes
cinétiques

Applications
industrielles

- ▶ Aérosols en milieux raréfiés
- ▶ Aérosols dans les poumons humains



Projets industriels en cours

- ▶ Couplage entre Direct Numerical Simulation (DNS) et des modèles moyennés pour les sprays et fluides diphasiques
- ▶ Etude de sûreté pour ITER: aérosols en milieu raréfiés
- ▶ Etude des aérosols dans les poumons humains (simulation du poumon humain)
- ▶ Méthodes pour le couplage du transfert radiatif avec la physique atomique



Travaux théoriques et interdisciplinaires

- ▶ Equations cinétiques et méthodes particulières sous-jacentes
- ▶ Ecoulements gaz-particules
- ▶ Méthodes d'entropie, hypo-coercitivité
- ▶ Régularités, singularités pour les noyaux de collision
- ▶ Dynamique des populations (écologie quantitative)



laurent.desvillettes@cmla.ens-cachan.fr

Equipe écoulements avec surface libre dirigée par Frédéric DIAS



Projets industriels en cours

- ▶ Flottement d'ailes en régime transsonique ($mac \sim 1$). Transfert de technologie de l'expertise du laboratoire vers le solveur Navier-Stokes utilisé chez Dassault.
- ▶ Cartographie des zones inondables sur le pourtour méditerranéen suite à un tsunami en collaboration avec plusieurs universités dans le cadre d'un projet européen
- ▶ Modélisation de l'arrivée de vagues extrêmes sur la côte et code numérique associé résolvant les équations de Boussinesq

3

Écoulements avec surface libre

Applications industrielles

- ▶ Tsunamis
- ▶ Vagues côtières
- ▶ Ondes inter-faciales
- ▶ Impact des vagues sur structures



Travaux théoriques et interdisciplinaires

- ▶ Ondes dans un milieu stratifié (ex: couche de pétrole au dessus d'une couche d'eau): application aux marées noires.
- ▶ Développement d'un outil pour étudier la stabilité des ondes solitaires couplé au code numérique associé
- ▶ Etude des déclenchements de tsunamis par tremblement de terre, par chute d'astéroïde, par glissement de terrain en collaboration avec l'école polytechnique fédérale de Lausanne



frederic.dias@cmla.ens-cachan.fr

Equipe Analyse Numérique dirigée par Frédéric PASCAL



Projets industriels en cours

- ▶ Problème de positivité sur des maillages non structurés
- ▶ Problème de transport pour la neutronique (équation de la chaleur pour la diffusion, coefficient de diffusion, tenseur de diffusion anisotrope)
- ▶ Expertises sur un code de simulation d'un magnétron (dépose de couches minces sur du verre)
- ▶ Mise en place d'un démonstrateur expérimentant le cadre générique et les spécifications d'interopérabilité d'une plateforme Open Source
- ▶ Conseil en éléments finis discontinus (ordre & volumes finis)

4

Analyse numérique

Applications industrielles

- ▶ Analyse numérique des codes numériques déployés chez des industriels
- ▶ Expertises numériques pour industriels



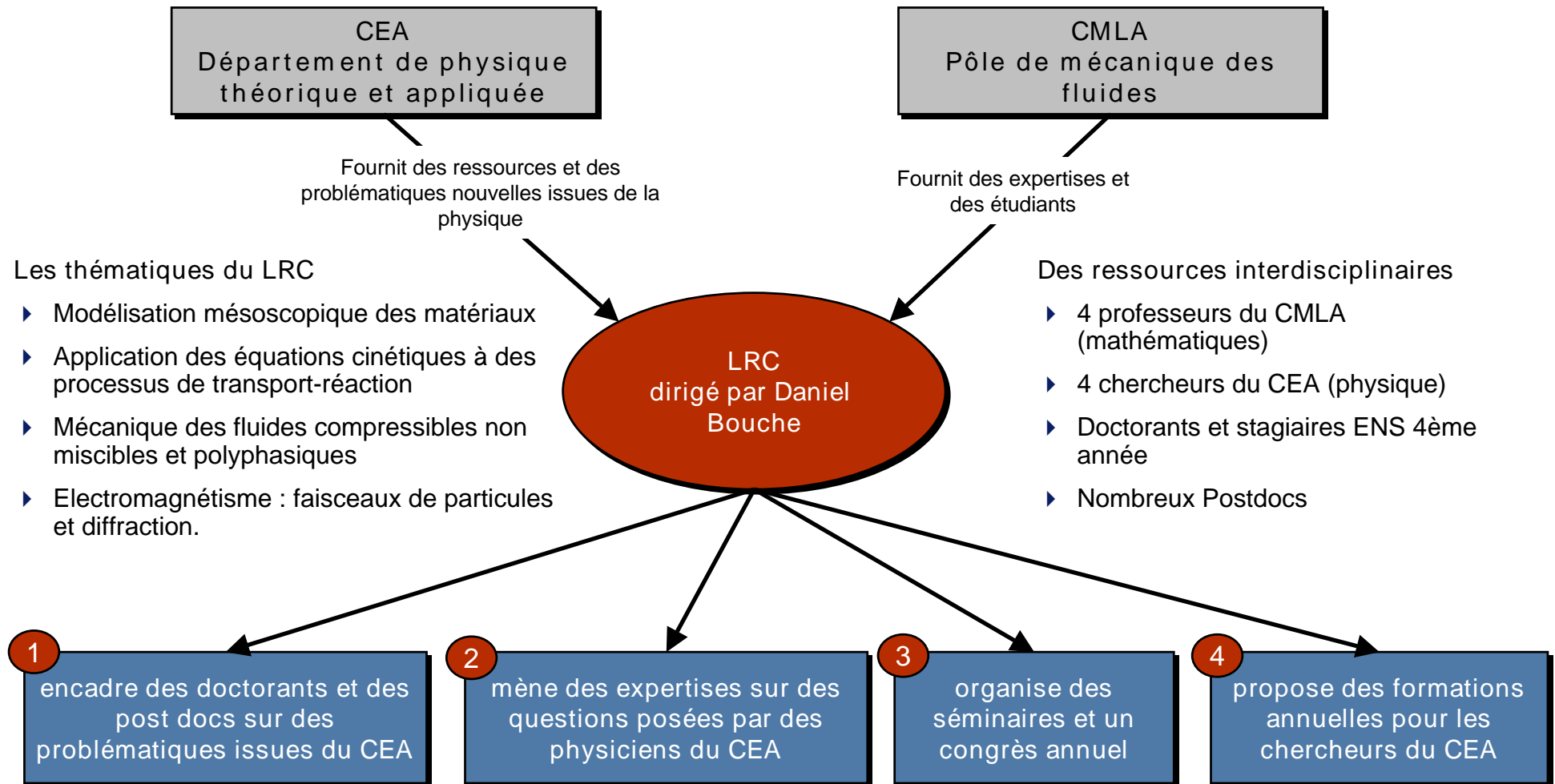
Travaux théoriques et interdisciplinaires

- ▶ Méthodes de Galerkin discontinues
- ▶ Estimateurs a posteriori
- ▶ Etude de la convergence de schémas adaptatifs
- ▶ Traitement des conditions aux limites pour les systèmes hyperboliques



frederic.pascal@cmla.ens-cachan.fr

Le LRC consolide le partenariat entre le CEA et le CMLA et fournit un cadre de collaboration fertile entre mathématiciens et physiciens pour résoudre des problèmes concrets



daniel.bouche@cea.fr

Plan général



- INTRODUCTION
- APPROCHE MULTIMATERIAUX
 - 1 matériau
 - 2 matériaux
- APPROCHE BI-FLUIDES



INTRODUCTION

- Écoulements faisant intervenir plus d'un fluide :
 - Miscibles
 - Non miscibles
 - Diphasiques
- Pour les écoulements non miscibles ou diphasiques
 - Suivi ou capture d'interfaces (difficulté majeure : les interfaces)
 - Équations moyennées (difficulté majeure : quels modèles et termes non conservatifs)
- Difficulté présente partout : fluides réels => lois d'états le plus souvent tabulées





APPROCHE MULTIMATERIAUX

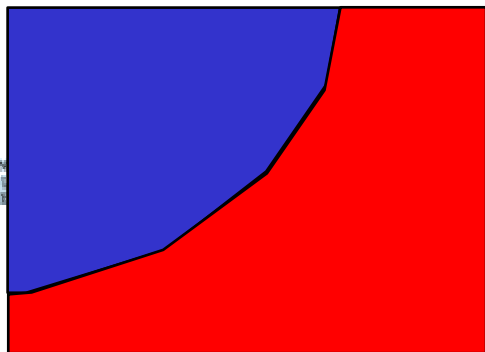


Hypothèses

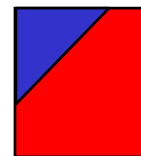
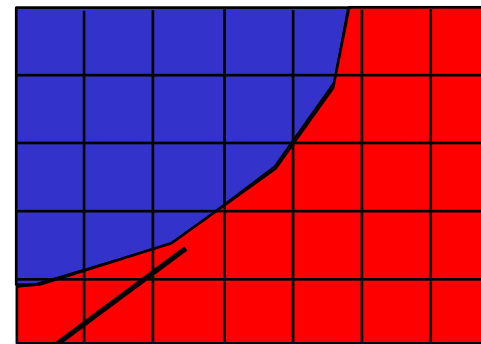
- Fluides non miscibles ou temps caractéristique de diffusion négligeable.
- Fluides compressibles, pas de viscosité moléculaire.
- Modèle des équations d'Euler compressible.
- Equations d'état réelles.
- Maillage cartésien orthogonal.



PHYSIQUE



NUMERIQUE



Dans chaque maille mixte,
l'interface est représentée
par une droite.
Les fluides sont purs de part
et d'autre de l'interface.

Caractéristiques de la méthode

- Objectifs :
 - Utilisation d'un schéma VF eulérien direct
 - Capture d'interface en 2D-3D
 - Condition de glissement pur entre les matériaux
 - Maillages cartésiens orthogonaux
 - Géométrie plane ou axi symétrique
 - Schéma robuste d'ordre 2
 - Méthode strictement conservative
 - Equations d'état réelles pour les matériaux
 - Compatible à une parallélisation



Plan de la présentation

- Le schéma volume fini *VFFC*
- Extension du schéma *VFFC* à la capture d'interface (*NIP*)
- Résultats en *2D*



Le schéma volume fini VFFC

- **VFFC : Volume Fini à Flux Caractéristiques (Ghidaglia et al., 2001)**

Le vecteur des variables du système V est centré aux mailles, associé d'un vecteur de flux $F(V)$.

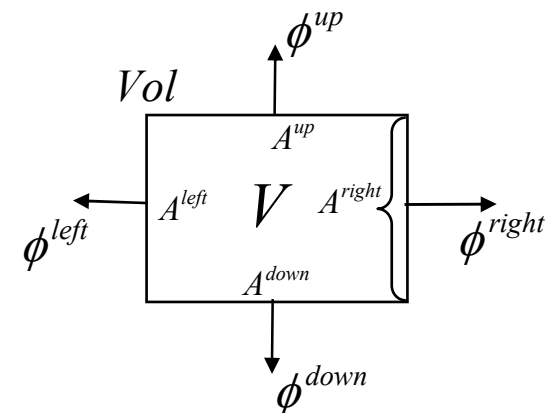
Le système de lois de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F^i}{\partial x_i} = 0$$

Le schéma volume fini se déduit de l'intégration de ce système sur le volume de contrôle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} V d\Omega + \int_{\Gamma} F \cdot \vec{n} d\Gamma = 0$$

$$\Rightarrow Vol \frac{V^{n+1} - V^n}{dt} + \sum_{i=1}^d A^i \phi^i = 0$$



Le schéma volume fini VFFC

- Dans le cas des équations d'Euler compressible
 - Variables conservatives eulériennes :

$$V = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}$$

- Flux normal :

$$F \cdot n = \sum_i F^i n_i = \begin{pmatrix} \rho (u \cdot n) \\ \rho u (u \cdot n) + p n \\ \rho E (u \cdot n) + p (u \cdot n) \end{pmatrix} = V (u \cdot n) + p N$$

avec $N = (0, n, \vec{u} \cdot \vec{n})^t$,

ρ la densité, \vec{u} le vecteur vitesse,

e l'énergie interne massique,

$E = e + 1/2 u^2$ l'énergie totale massique,

$p = \mathcal{P}(\rho, e)$ la pression donnée par l'équation d'état \mathcal{P} .



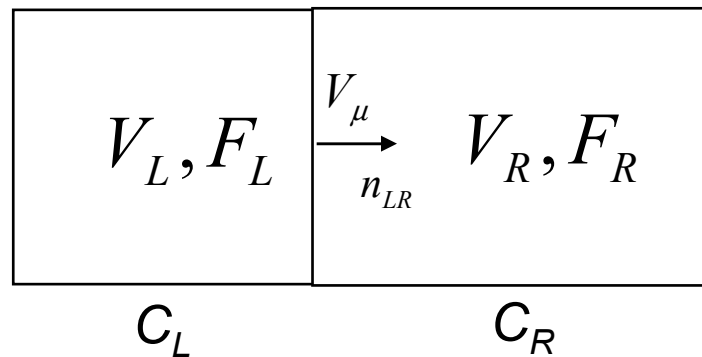
Le schéma volume fini VFFC

- Le flux VFFC à travers la face commune entre les mailles C_L et C_R est obtenu par une linéarisation et décentrement upwind des flux caractéristiques, dans l'espace diagonal du système:

$$\phi(V_L, V_R, n_{LR}) = \frac{F_L + F_R}{2} \cdot n_{LR} - \text{sign}(J(V_\mu, n_{LR})) \frac{F_R - F_L}{2} \cdot n_{LR}$$

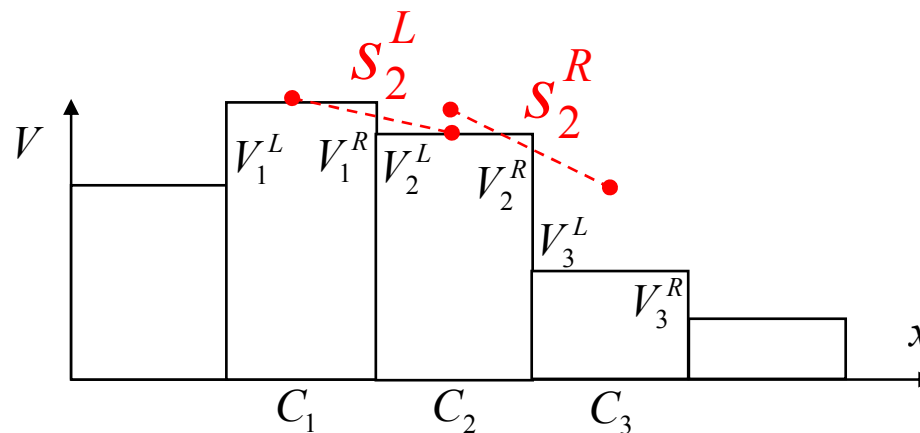
avec $\text{diag}(\lambda_i) = \mathcal{L} J(V_\mu, n) \mathcal{R}$

et $\text{sign}(J(V_\mu, n)) = \mathcal{R} \text{diag}(\text{sign}(\lambda_i)) \mathcal{L}$



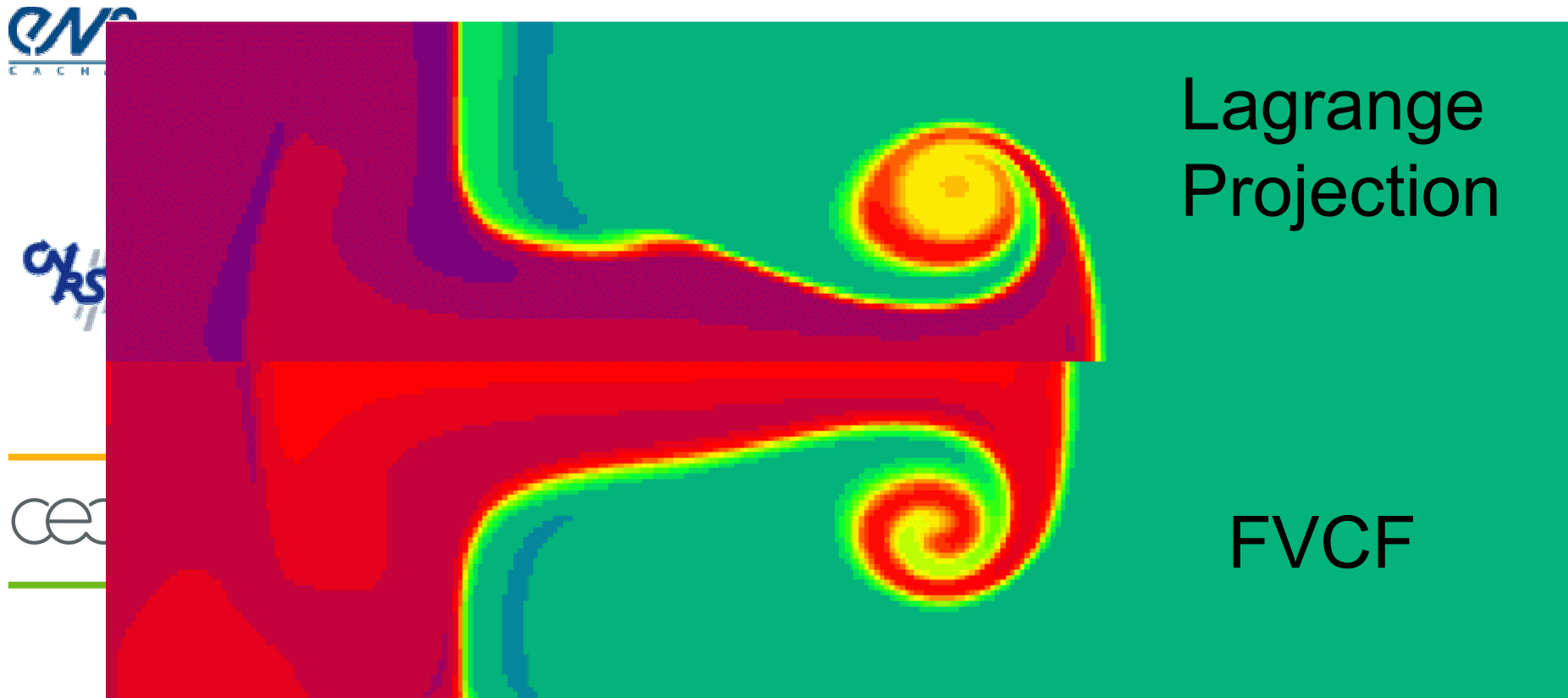
Le schéma volume fini VFFC

- **VFFC : Volume Fini à Flux Caractéristiques (Ghidaglia et al., 2001)**
 - Remarques :
 - Très robuste
 - Strictement conservatif. $\phi(V_L, V_R, \vec{n}_{LR}) = \phi(V_R, V_L, \vec{n}_{RL})$
 - L'ordre 2 en temps est obtenu par prédiction/correction.
 - L'ordre 2 en espace est obtenu par une reconstruction monotone des variables de type MUSCL avec limiteur de pente *minmod*. On utilise deux gradients par mailles :



Le schéma volume fini VFFC

- Comparaison entre le schéma VFFC et le schéma Lagrange-projection
 - Instabilité de Richtmyer-Meshkov, un seul fluide.
 - Les deux schémas sont d'ordre 2 en temps et en espace.
 - Géométrie axi symétrique.
 - 300 x 64 mailles.

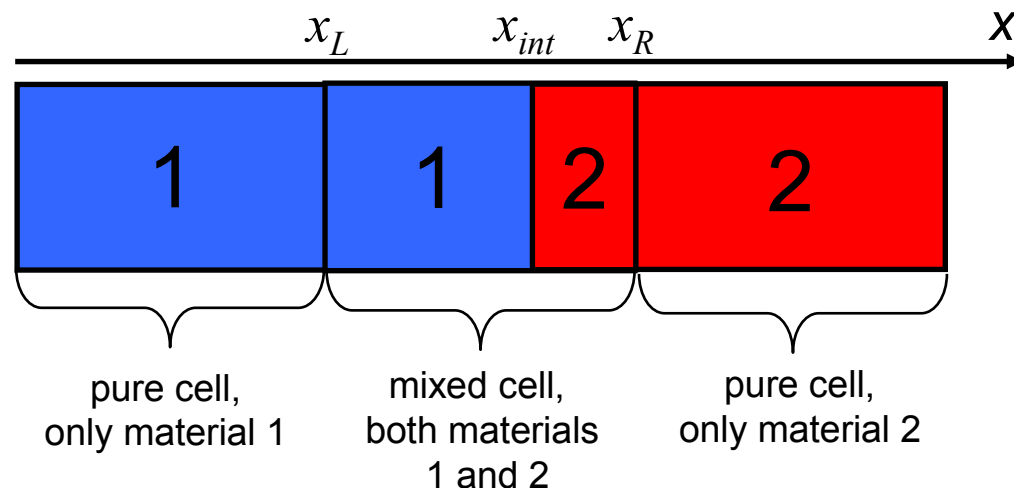


Capture d'interface VFFC-NIP

- **NIP : Natural Interface Positioning**

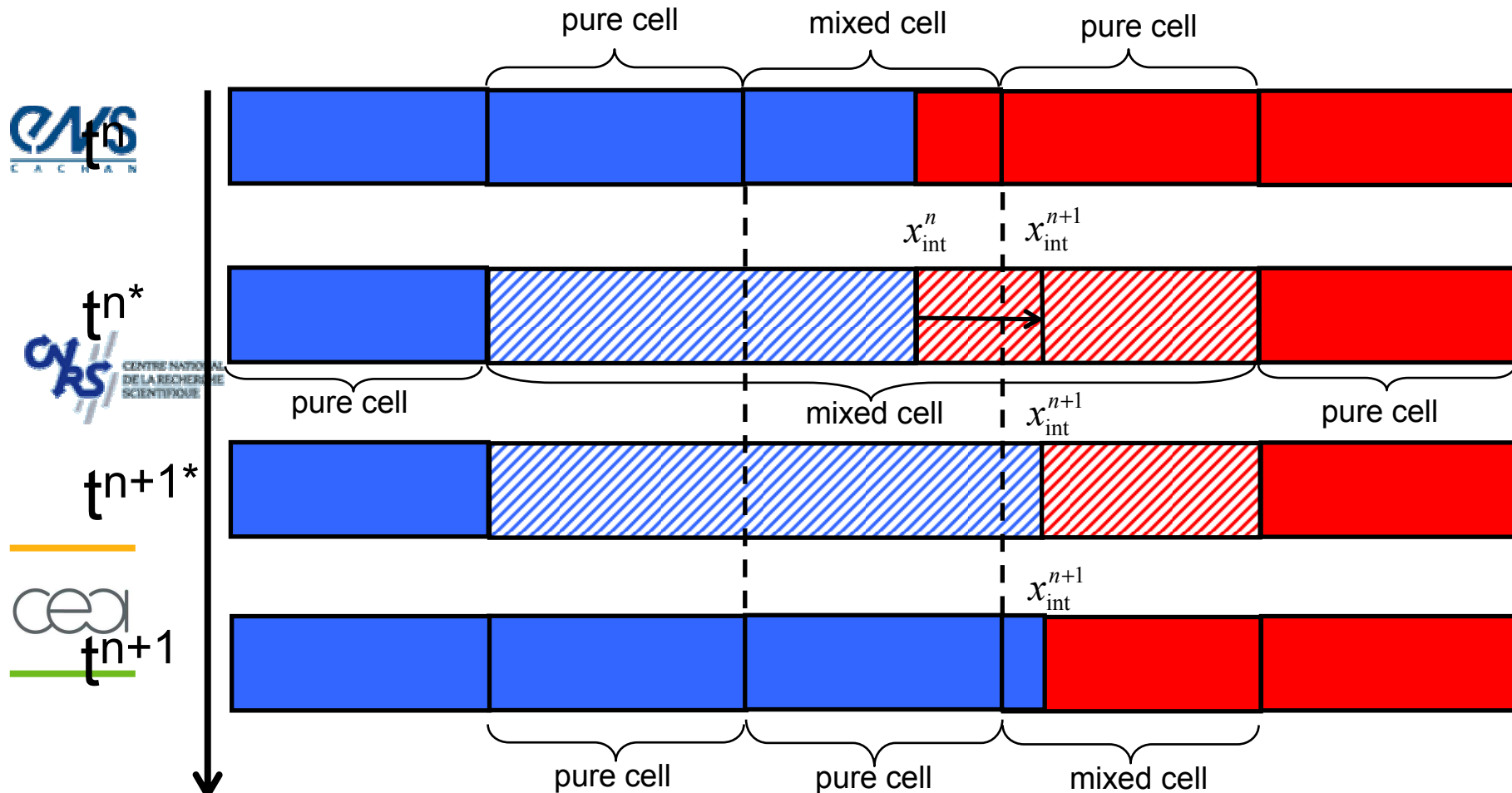
- Capture d'interface en 1D, deux difficultés :

- Comment assurer la condition CFL du schéma et comment permettre le déplacement d'une interface d'une maille à sa voisine ?
- Comment écrire la loi de conservation dans une maille mixte, et en particulier quel flux attribuer à l'interface entre deux matériaux d'EOS différentes ?



Capture d'interface VFFC-NIP

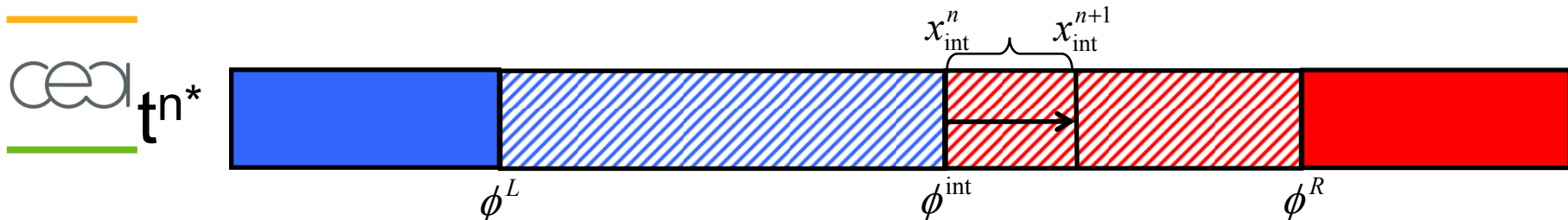
- Comment assurer la condition CFL du schéma et comment permettre le déplacement d'une interface d'une maille à sa voisine ?
 - Oublions la face de la maille !



Capture d'interface VFFC-NIP

- Remarques :
 - La fusion d'une maille pure avec un volume partiel est réalisée de manière conservative par une moyenne volumique
 - Le flux à l'interface entre les mailles fusionnées est calculé à partir des valeurs moyennées
 - Le mouvement de l'interface est directement donné par la vitesse à l'interface :

$$x_{\text{int}}^{n+1} = x_{\text{int}}^n + u_{\text{int}} dt$$



Capture d'interface VFFC-NIP

- Comment écrire la loi de conservation dans une maille mixte, et en particulier quel flux attribuer à l'interface entre deux matériaux d'EOS différente ?
 - Intégrons les équations d'Euler en prenant en compte le mouvement de l'interface:

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} d\Omega = 0$$



L'intégration donne :

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial V}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} V d\Omega - \int_{\Gamma(t)} V (\vec{u}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma) d\Gamma$$



$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial F}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma(t)} F \cdot \vec{n}_\Gamma d\Gamma$$

Le flux normal peut se décomposer : $F \cdot \vec{n}_\Gamma = V (\vec{u}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma) + p_\Gamma N_\Gamma$



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} V d\Omega + \int_{\Gamma(u_\Gamma=0)} F \cdot \vec{n}_\Gamma d\Gamma + \int_{\Gamma(u_\Gamma \neq 0)} p_\Gamma \cdot N_\Gamma d\Gamma = 0$$

with $N_\Gamma = (0, \vec{n}_\Gamma, \vec{u}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma)^t$

Capture d'interface VFFC-NIP

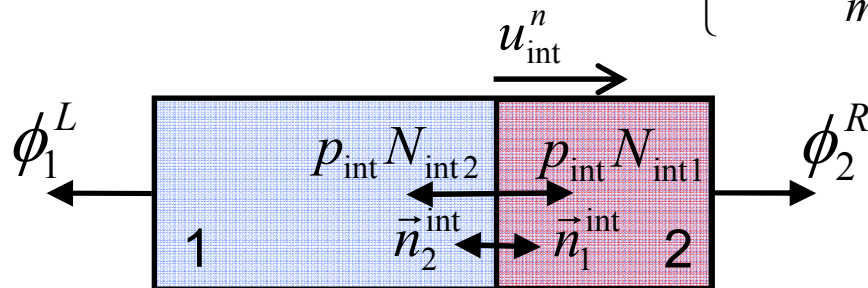
- Ecrivons la conservation des variables pour chaque volume :
 - ϕ_1^L et ϕ_2^R sont calculés à l'aide du schéma mono fluide

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Vol_1^{n+1} V_1^{n+1} - Vol_1^n V_1^n}{dt} + A (\phi_1^L + p_{int} N_{int1}) = 0 \quad \text{with } N_{int1} = (0, \vec{n}_1^{int}, \vec{u}_{int} \cdot \vec{n}_1^{int}) \\ \frac{Vol_2^{n+1} V_2^{n+1} - Vol_2^n V_2^n}{dt} + A (\phi_2^R + p_{int} N_{int2}) = 0 \quad \text{with } N_{int2} = (0, \vec{n}_2^{int}, \vec{u}_{int} \cdot \vec{n}_2^{int}) \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} m_1^{n+1} = m_1^n - dt A \phi_1^L \quad (1) \\ u_1^{n+1} = \frac{m_1^n}{m_1^{n+1}} u_1^n - \frac{dt A}{m_1^{n+1}} (\phi_1^L (2) + p_{int}) \\ v_1^{n+1} = \frac{m_1^n}{m_1^{n+1}} v_1^n - \frac{dt A}{m_1^{n+1}} \phi_1^L \quad (3) \\ E_1^{n+1} = \frac{m_1^n}{m_1^{n+1}} E_1^n - \frac{dt A}{m_1^{n+1}} (\phi_1^L (4) + p_{int} u_{int}) \end{array} \right.$$

$$\text{and } \left\{ \begin{array}{l} m_2^{n+1} = m_2^n - dt A \phi_2^R \quad (1) \\ u_2^{n+1} = \frac{m_2^n}{m_2^{n+1}} u_2^n - \frac{dt A}{m_2^{n+1}} (\phi_2^R (2) - p_{int}) \\ v_2^{n+1} = \frac{m_2^n}{m_2^{n+1}} v_2^n - \frac{dt A}{m_2^{n+1}} \phi_2^R \quad (3) \\ E_2^{n+1} = \frac{m_2^n}{m_2^{n+1}} E_2^n - \frac{dt A}{m_2^{n+1}} (\phi_2^R (4) - p_{int} u_{int}) \end{array} \right.$$



Capture d'interface VFFC-NIP

- Pression et vitesse à l'interface en 1D :
 - Le système est écrit en variables lagrangiennes
 - Pas d'échange de masse ou d'énergie interne entre les matériaux
 - L'évolution des invariants de Riemann locaux est donnée par:

$$\frac{\partial p^+}{\partial t} + c \frac{\partial p^+}{\partial x} = 0, \quad \text{avec } p^+ = p + \rho c u$$



$$\frac{\partial p^-}{\partial t} - c \frac{\partial p^-}{\partial x} = 0, \quad \text{avec } p^- = p - \rho c u$$

- Comme dans le schéma VFFC, les invariants de Riemann sont décentrés upwind selon les droites caractéristiques avec $c > 0$:



$$p_{\text{int}}^+ = p_l^+ \Leftrightarrow p_{\text{int}} + \rho c_l u_{\text{int}} = p_l + \rho c_l u_l$$

$$p_{\text{int}}^- = p_r^- \Leftrightarrow p_{\text{int}} - \rho c_r u_{\text{int}} = p_r + \rho c_r u_r$$

- La solution est alors :



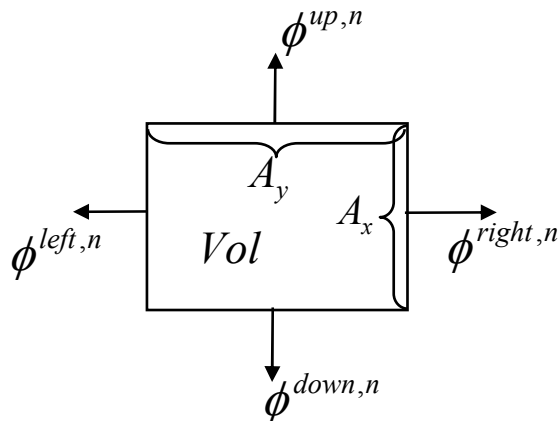
$$\begin{cases} p_{\text{int}} = \frac{\rho c_r p_l + \rho c_l p_r}{\rho c_l + \rho c_r} + \frac{\rho c_l \rho c_r}{\rho c_l + \rho c_r} \frac{u_l - u_r}{\rho c_l + \rho c_r} \\ u_{\text{int}} = \frac{\rho c_l u_l + \rho c_r u_r}{\rho c_l + \rho c_r} + \frac{p_l - p_r}{\rho c_l + \rho c_r} \end{cases}$$

Capture d'interface VFFC-NIP

- L'approche 1D est étendue en 2D par un splitting directionnel
 - Schéma mono fluide : le splitting directionnel ne change pas le schéma si les flux sont calculés au même temps dans chaque direction.



$$Vol \frac{V^{n+1} - V^n}{dt} + A_x (\phi_x^{\text{Right},n} + \phi_x^{\text{Left},n}) + A_y (\phi_y^{\text{Up},n} + \phi_y^{\text{Down},n}) + A_z (\phi_z^{\text{Front},n} + \phi_z^{\text{Rear},n}) = 0$$

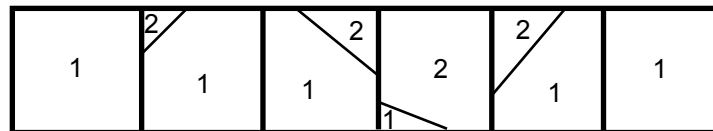
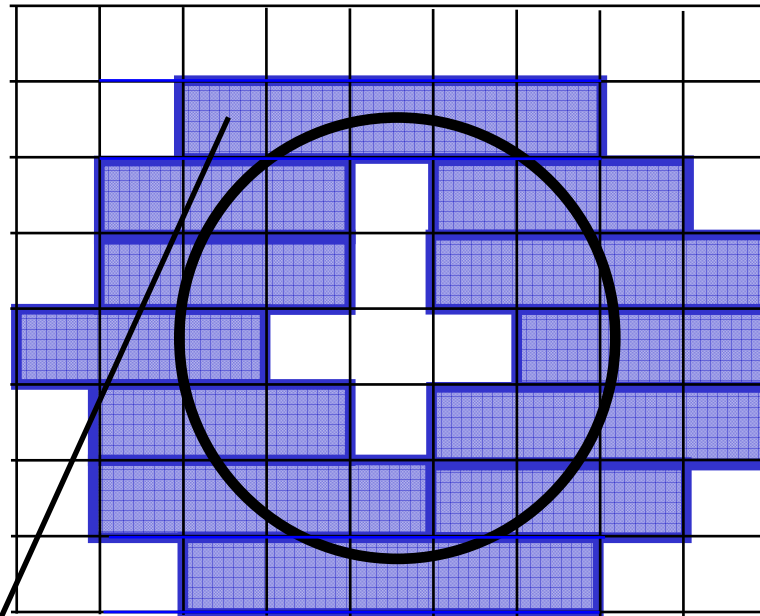


Capture d'interface VFFC-NIP

- Extension au cas multi matériaux
 - Phase x



Condensat

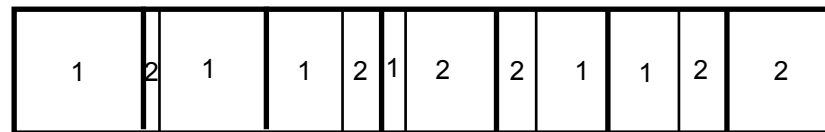
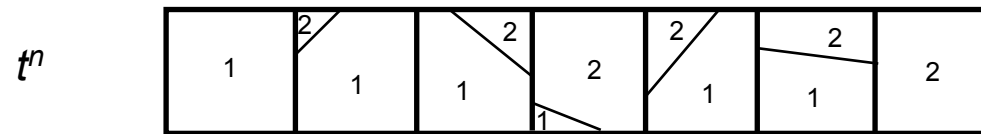


Capture d'interface VFFC-NIP

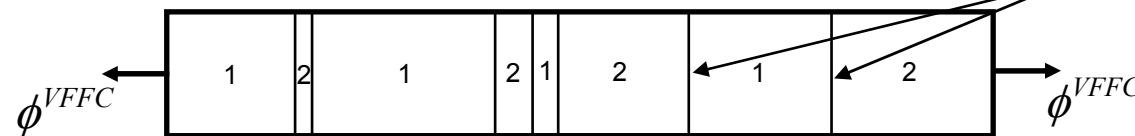
- Extension au cas multi matériaux :
 - L'algorithme *1D* est répété pour chaque direction
 - Au début du calcul, l'ordre des matériaux est connu dans une maille. Cette ordre est préservé par la méthode.
 - Nous opérons une "condensation" des mailles si plusieurs mailles mixtes sont voisines.



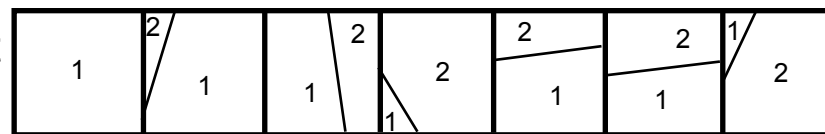
Projection conservative 1D



Flux aux interfaces



Projection et positionnement de l'interface à t^{n_x}



Capture d'interface VFFC-NIP

- Pression et vitesse à l'interface :
 - Le système est écrit en variables lagrangiennes
 - Pas d'échange de masse ou d'énergie interne entre les matériaux
 - L'évolution des invariants de Riemann locaux est donnée par:

$$\frac{\partial p^+}{\partial t} + c \frac{\partial p^+}{\partial x} = 0, \quad \text{avec } p^+ = p + \rho c u$$



$$\frac{\partial p^-}{\partial t} - c \frac{\partial p^-}{\partial x} = 0, \quad \text{avec } p^- = p - \rho c u$$

- Comme dans le schéma VFFC, les invariants de Riemann sont décentrés upwind selon les droites caractéristiques avec $c > 0$:



$$p_{\text{int}}^+ = p_l^+ \Leftrightarrow p_{\text{int}} + \rho c_l u_{\text{int}} = p_l + \rho c_l u_l$$

$$p_{\text{int}}^- = p_r^- \Leftrightarrow p_{\text{int}} - \rho c_r u_{\text{int}} = p_r + \rho c_r u_r$$

- La solution est alors :



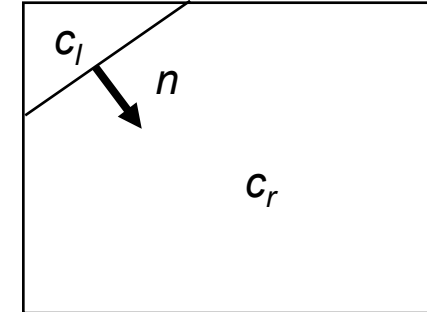
$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\text{int}} = \frac{\rho c_r p_l + \rho c_l p_r}{\rho c_l + \rho c_r} + \rho c_l \rho c_r \frac{u_l - u_r}{\rho c_l + \rho c_r} \\ u_{\text{int}} = \frac{\rho c_l u_l + \rho c_r u_r}{\rho c_l + \rho c_r} + \frac{p_l - p_r}{\rho c_l + \rho c_r} \end{array} \right.$$

Capture d'interface VFFC-NIP

- En 2D, la pression et la vitesse de l'interface sont obtenus en écrivant la formule 1D dans la direction de la normale :

$$\nabla p \cdot n = p_{\text{int}} - \frac{\rho c_r p_l + \rho c_l p_r}{\rho c_l + \rho c_r} = \rho c_l \rho c_r \frac{u_l - u_r}{\rho c_l + \rho c_r} \cdot n$$

$$u_{\text{int}} \cdot n = \left(\frac{\rho c_l u_l + \rho c_r u_r}{\rho c_l + \rho c_r} \cdot n + \frac{p_l - p_r}{\rho c_l + \rho c_r} \right)$$



- Ces grandeurs, contrainte normale de pression et vitesse de l'interface, sont projetés sur l'axe x, d'où :



$$\begin{cases} p_{\text{int}}^x = \frac{\rho c_r p_l + \rho c_l p_r}{\rho c_l + \rho c_r} + \left(\rho c_l \rho c_r \frac{u_l - u_r}{\rho c_l + \rho c_r} \cdot n \right) n^x \\ u_{\text{int}}^x = \left(\frac{\rho c_l u_l + \rho c_r u_r}{\rho c_l + \rho c_r} \cdot n + \frac{p_l - p_r}{\rho c_l + \rho c_r} \right) n^x \end{cases}$$



Capture d'interface *VFFC-NIP*

- A la fin de du calcul de l'évolution du système dans une direction, les normales sont recalculées selon l'algorithme de *Youngs* :



$$\vec{n}_i = - \frac{\nabla f_i}{\|\nabla f_i\|}$$

f_1	f_1 f_2	f_2
f_1	f_1	f_1 f_2
f_1	f_1	f_1



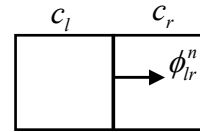
- Il est a noter que la méthode n'utilise que le vecteur normal à une interface, sans avoir besoin du calcul explicite des volumes partiels $2D$, ce qui est avantageux en temps calcul.



Capture d'interface VFFC-NIP

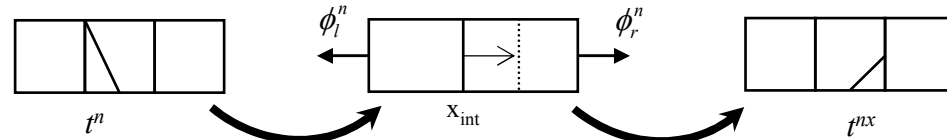
Phase x :

Calcul des flux VFFC horizontaux pour chaque face entre 2 mailles pures

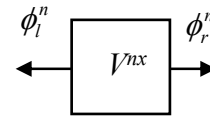


Parcours du maillage ligne par ligne :

- Détection d'une maille mixte
- Création du condensat
- Calcul de l'évolution du condensat
- Projection du résultat sur le maillage



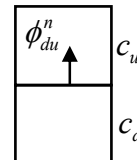
Calcul de l'évolution des grandeurs dans les mailles pures n'ayant pas été calculées dans un condensat



Calcul des normales aux interfaces en fonction des 9 mailles voisines

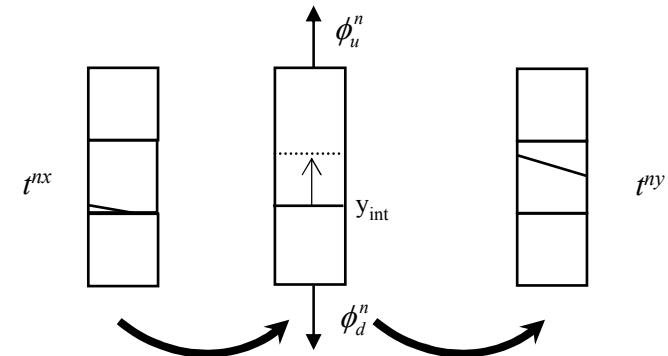
Phase y:

Calcul des flux VFFC verticaux pour chaque face entre 2 mailles pures

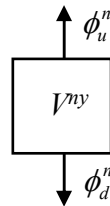


Parcours du maillage colonnes par colonnes :

- Détection d'une maille mixte
- Création du condensat
- Calcul de l'évolution du condensat
- Projection du résultat sur le maillage



Calcul de l'évolution des grandeurs dans les mailles pures n'ayant pas été calculées dans un condensat

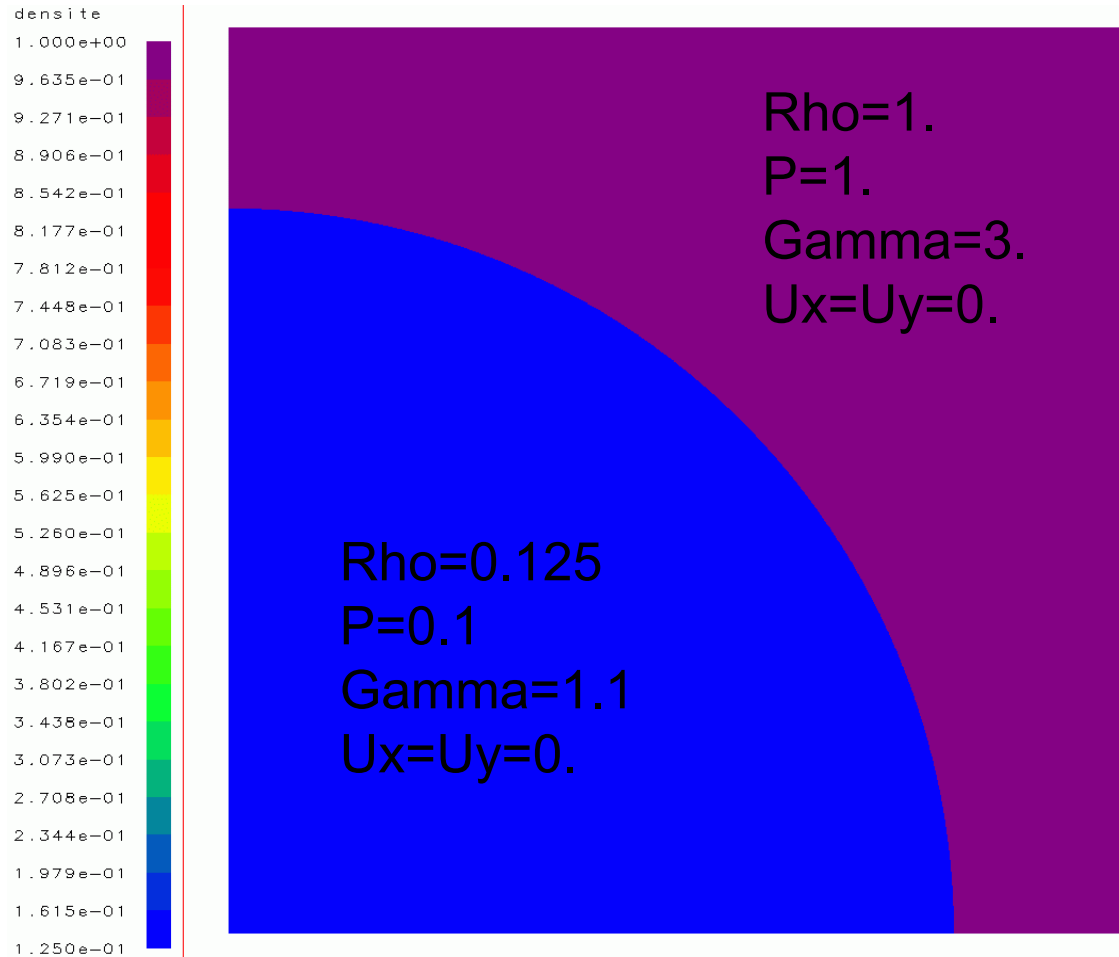


Calcul des normales aux interfaces en fonction des 9 mailles voisines



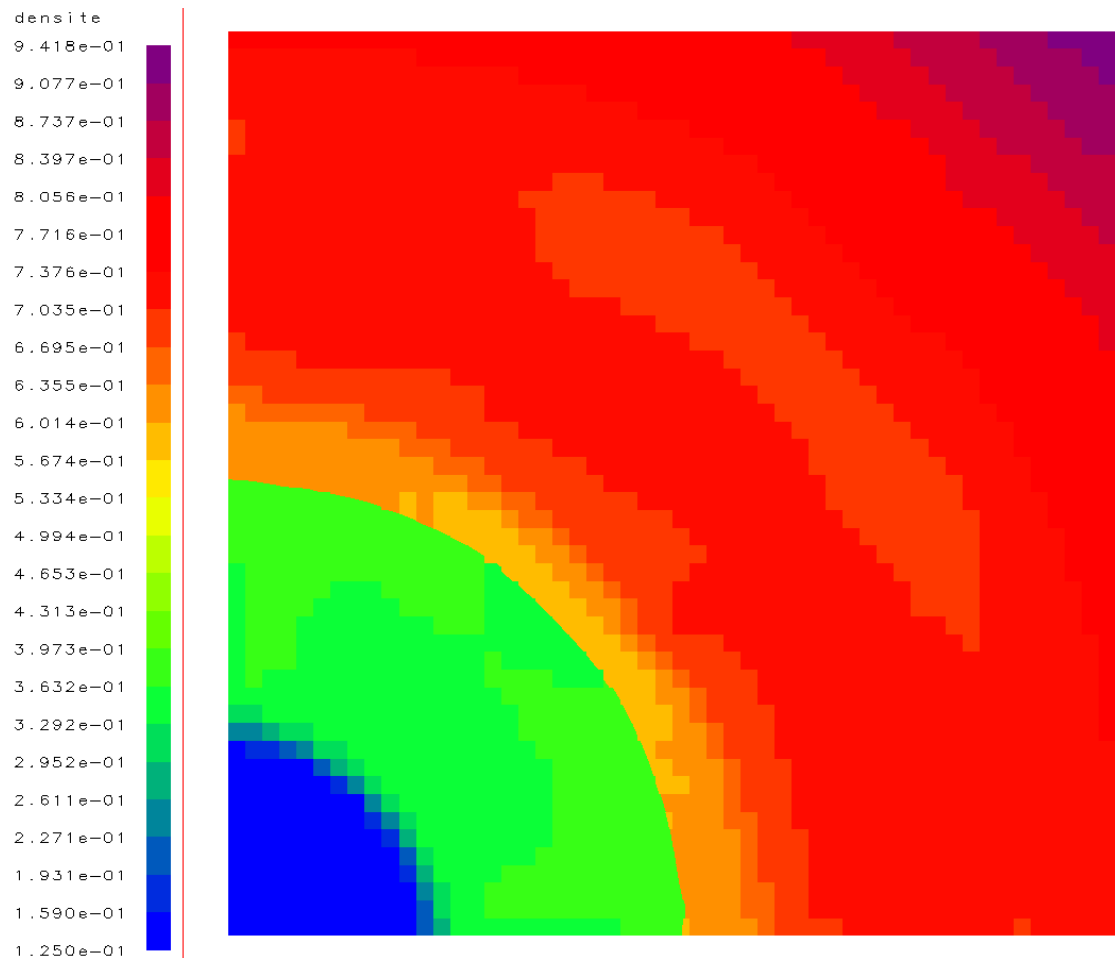
Capture d'interface VFFC-NIP

- Cylindrical SOD implosion 50x50 cells
 - Different EOS (perfect gases)
 - Strong difference on specific heat ratio γ between materials



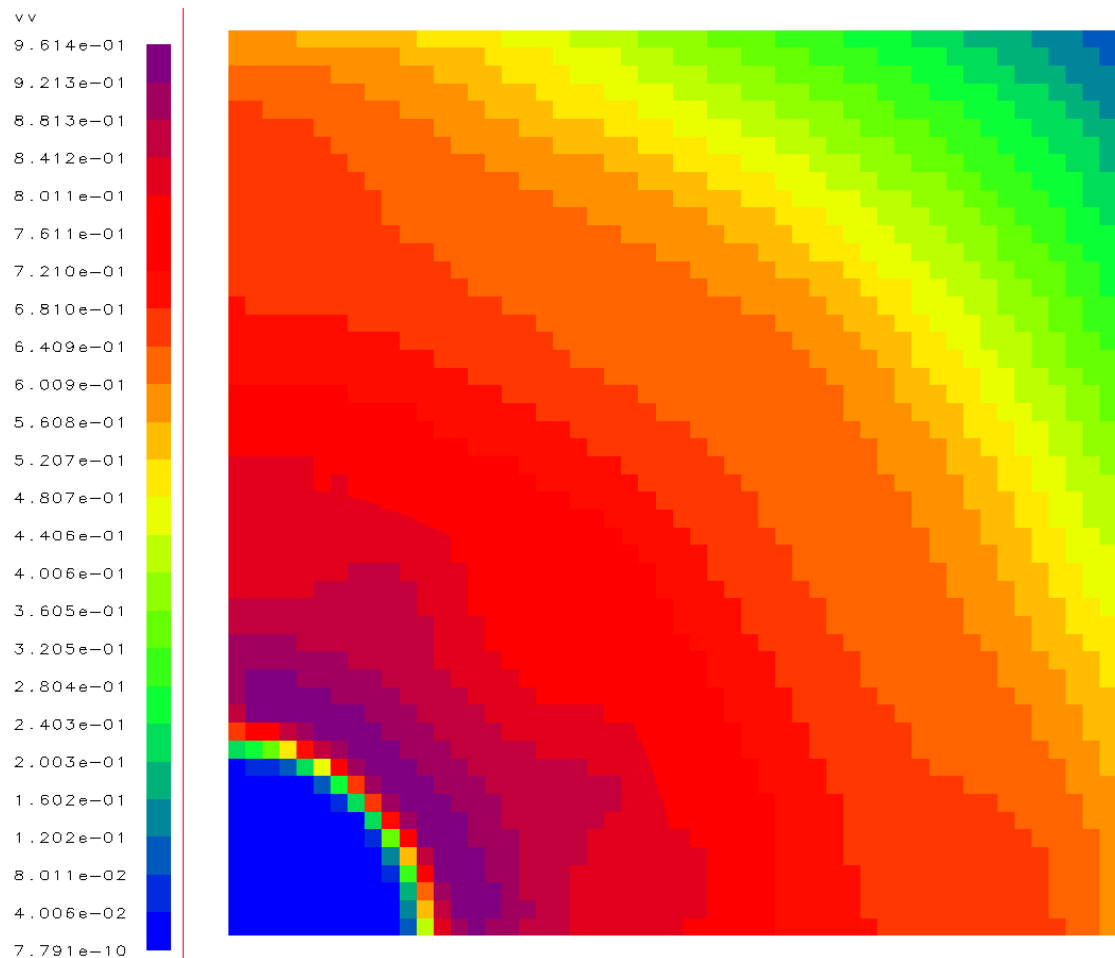
Capture d'interface VFFC-NIP

- Cylindrical SOD implosion 50x50 cells
 - Density at $t=0.1$



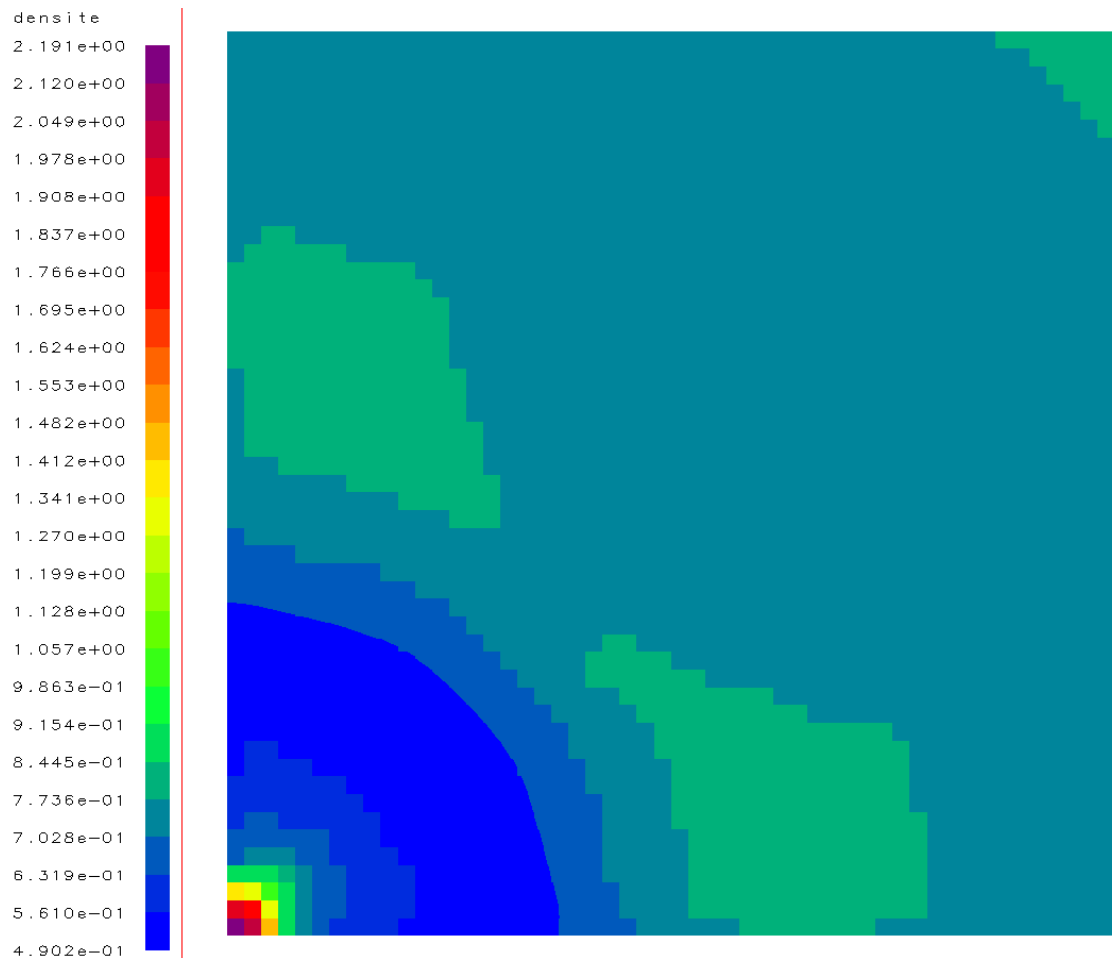
Capture d'interface VFFC-NIP

- Cylindrical SOD implosion 50x50 cells
 - Kinetic energy at $t=0.1$



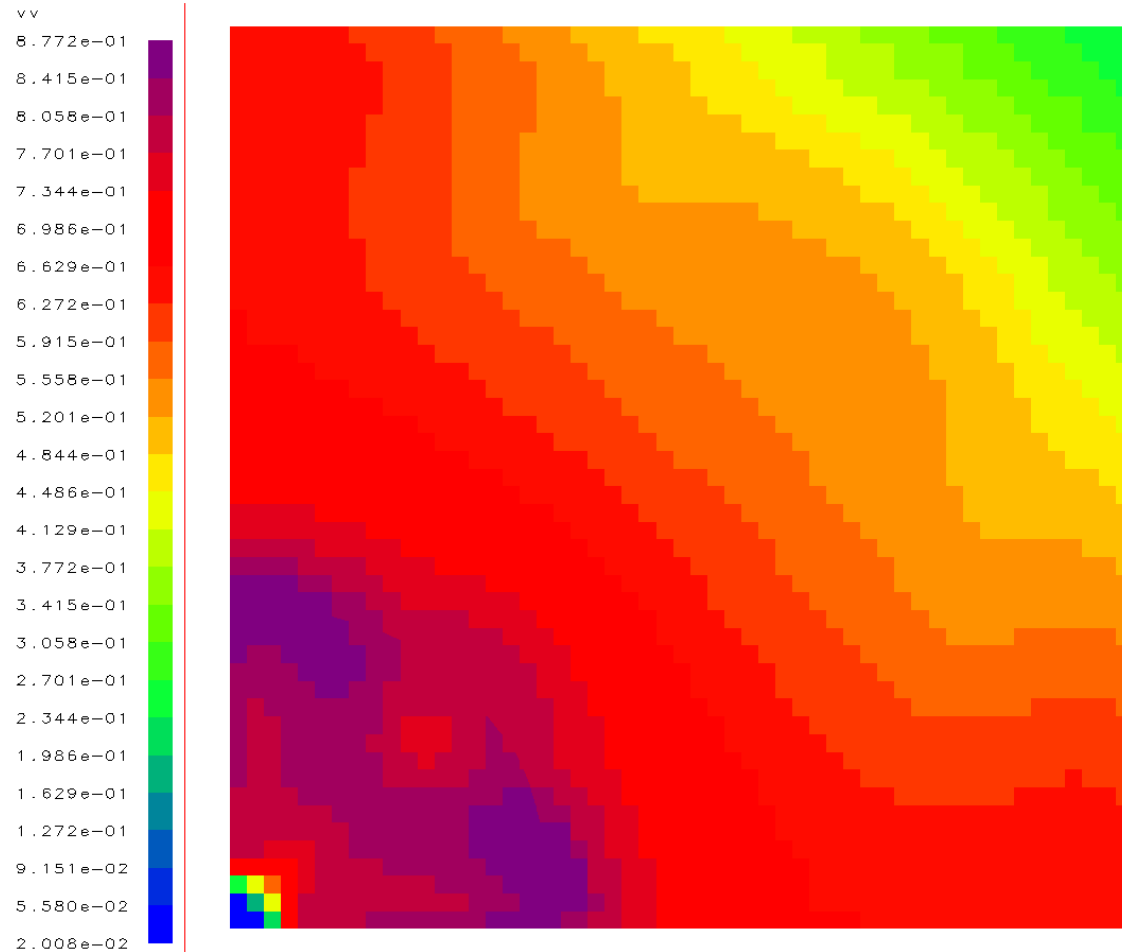
Capture d'interface VFFC-NIP

- Cylindrical SOD implosion 50x50 cells
 - Density at $t=0.25$



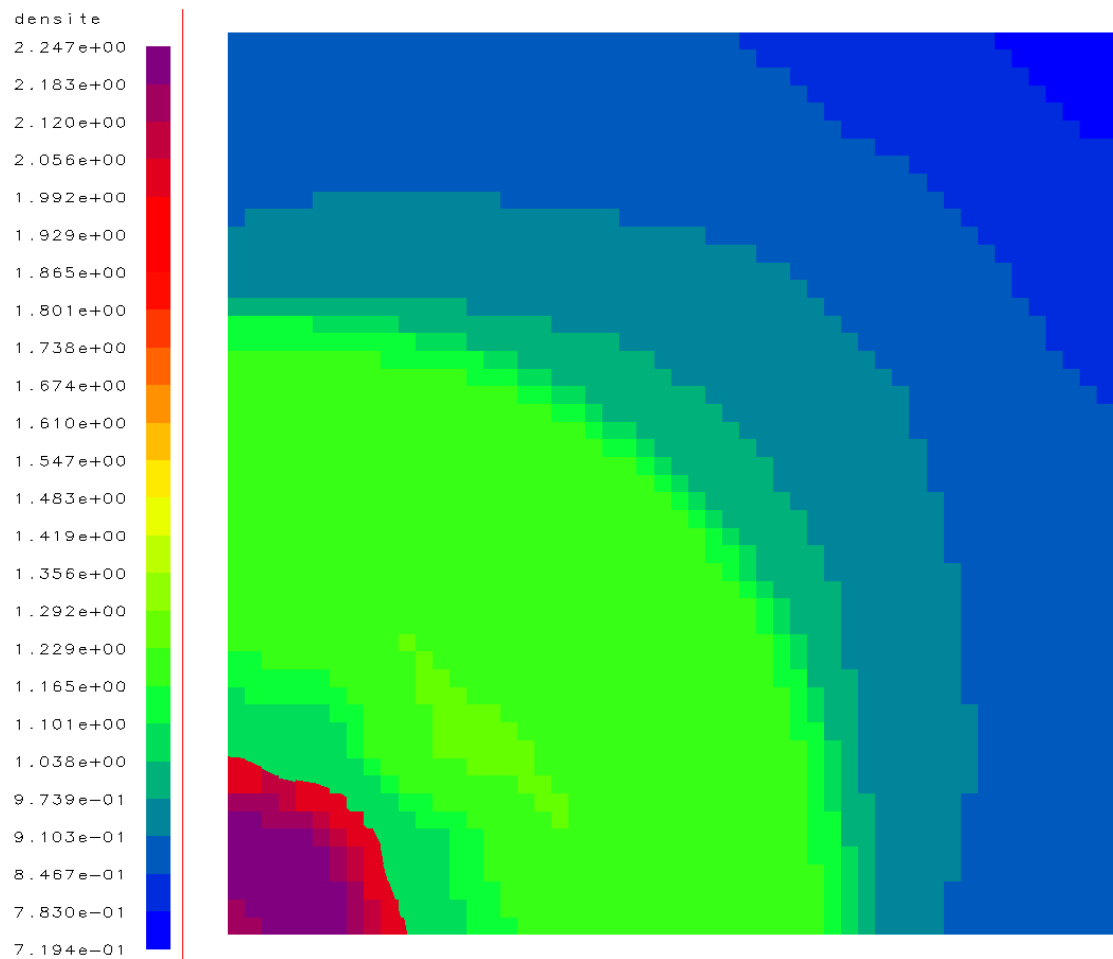
Capture d'interface VFFC-NIP

- Cylindrical SOD implosion 50x50 cells
 - Kinetic energy at $t=0.25$



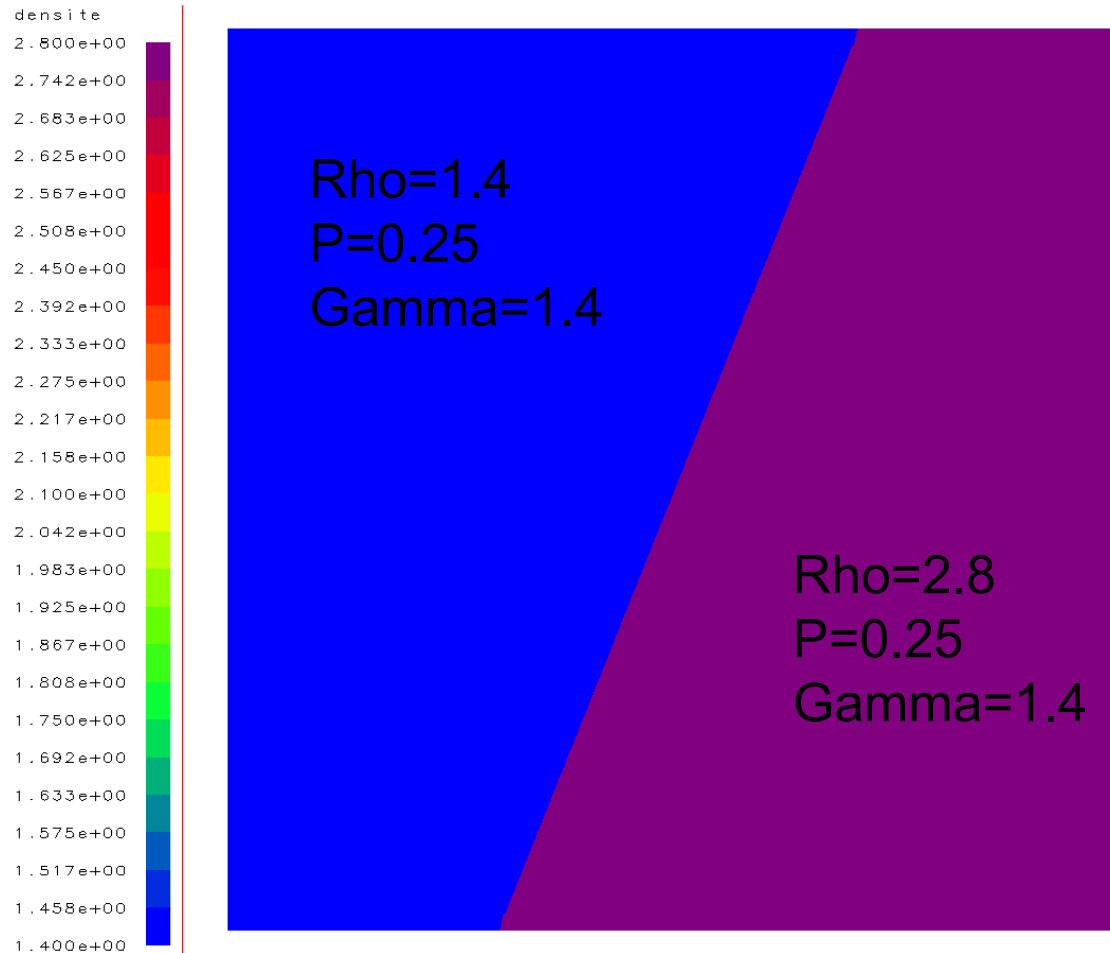
Capture d'interface VFFC-NIP

- Cylindrical SOD implosion 50x50 cells
 - Density at $t=0.5$



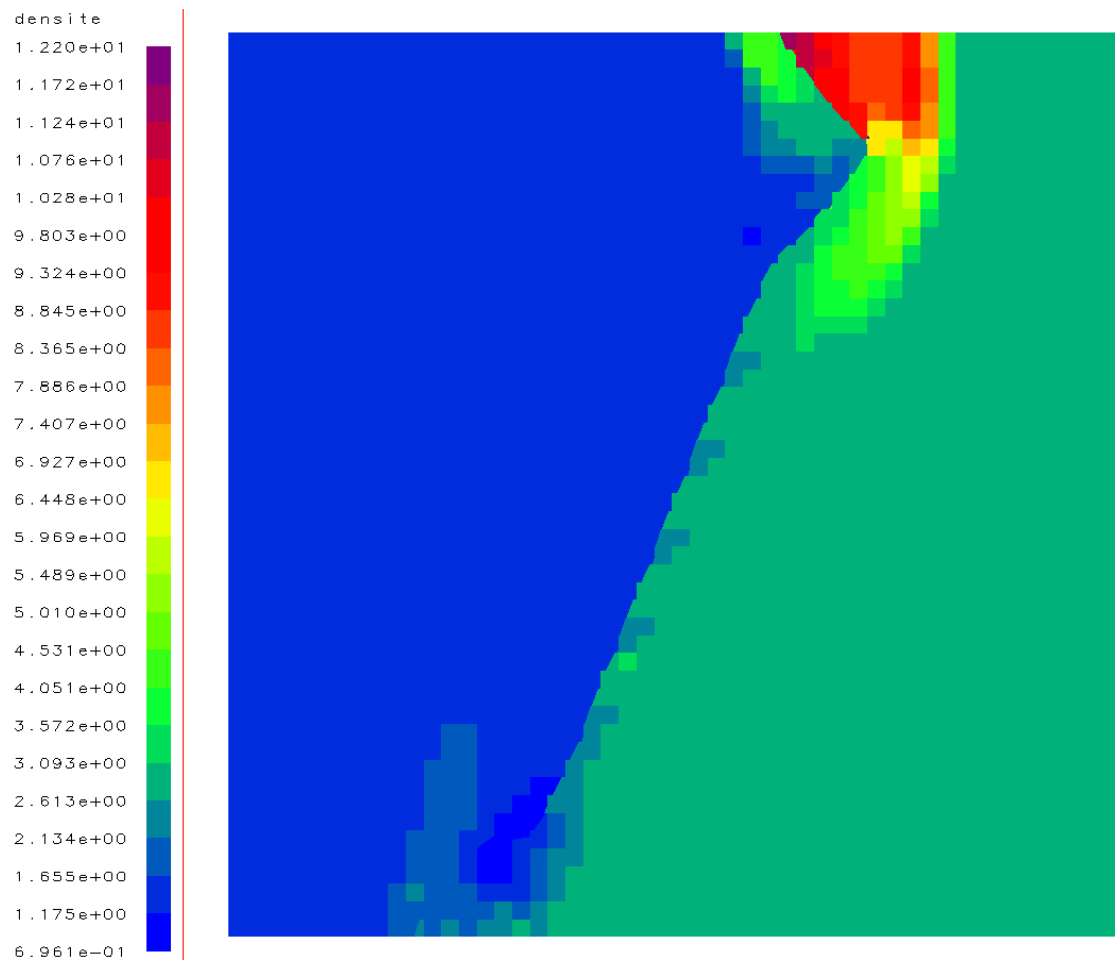
Capture d'interface VFFC-NIP

- Perfect shear test 50x50 cells
 - Shear direction is not an axis direction
 - Quantities at t=0



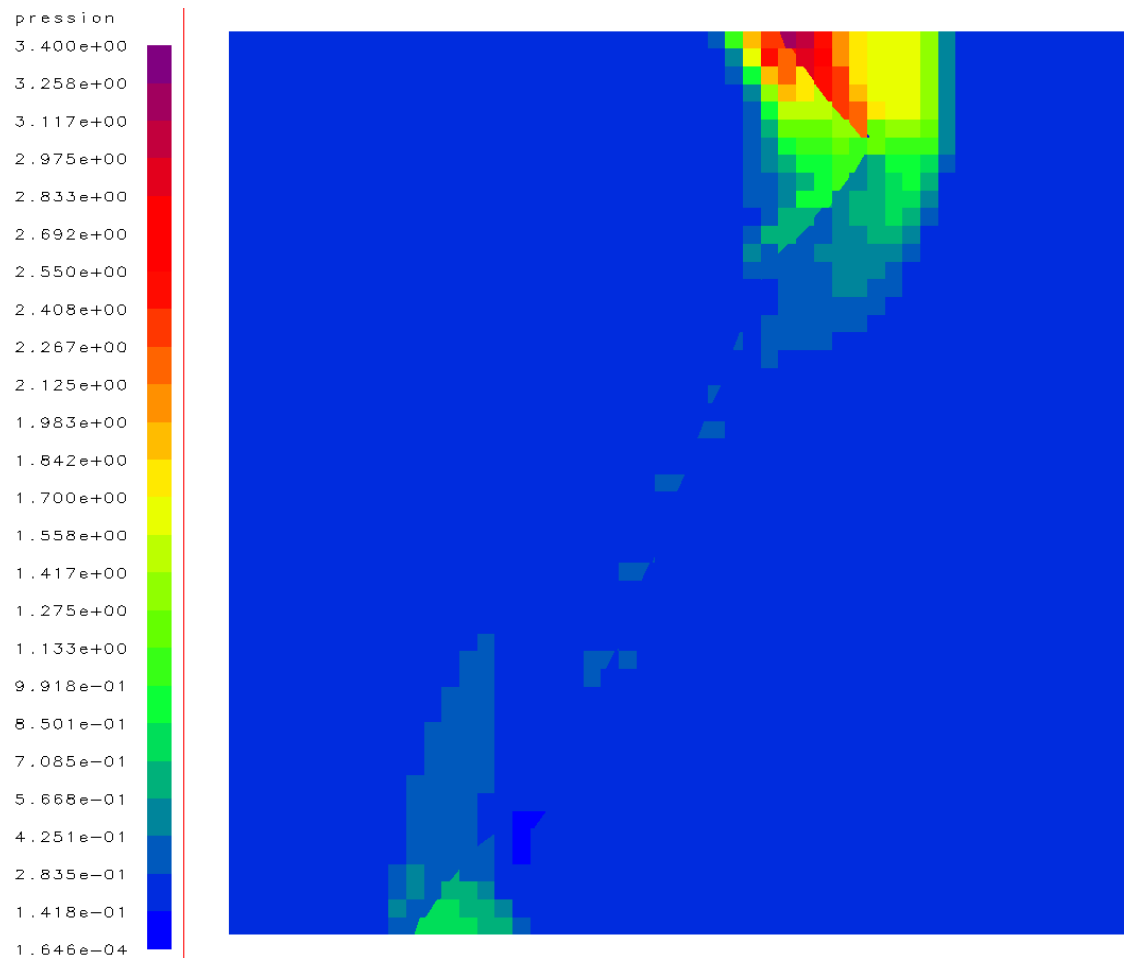
Capture d'interface VFFC-NIP

- Perfect shear test 50x50 cells
 - Density at $t=0.25$



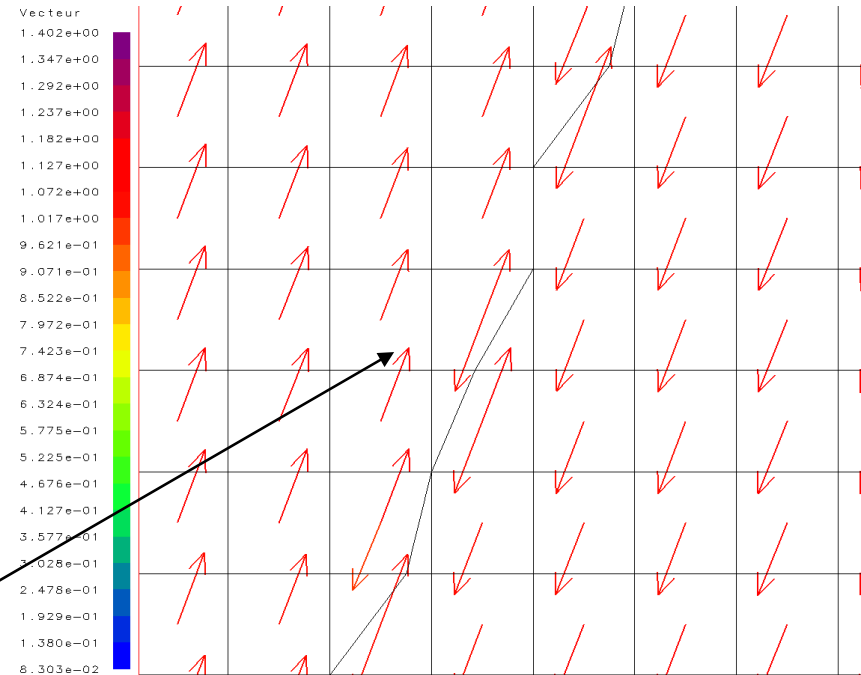
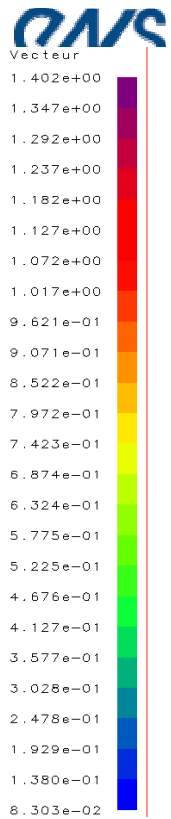
Capture d'interface VFFC-NIP

- Perfect shear test 50x50 cells
 - Pressure at t=0.25



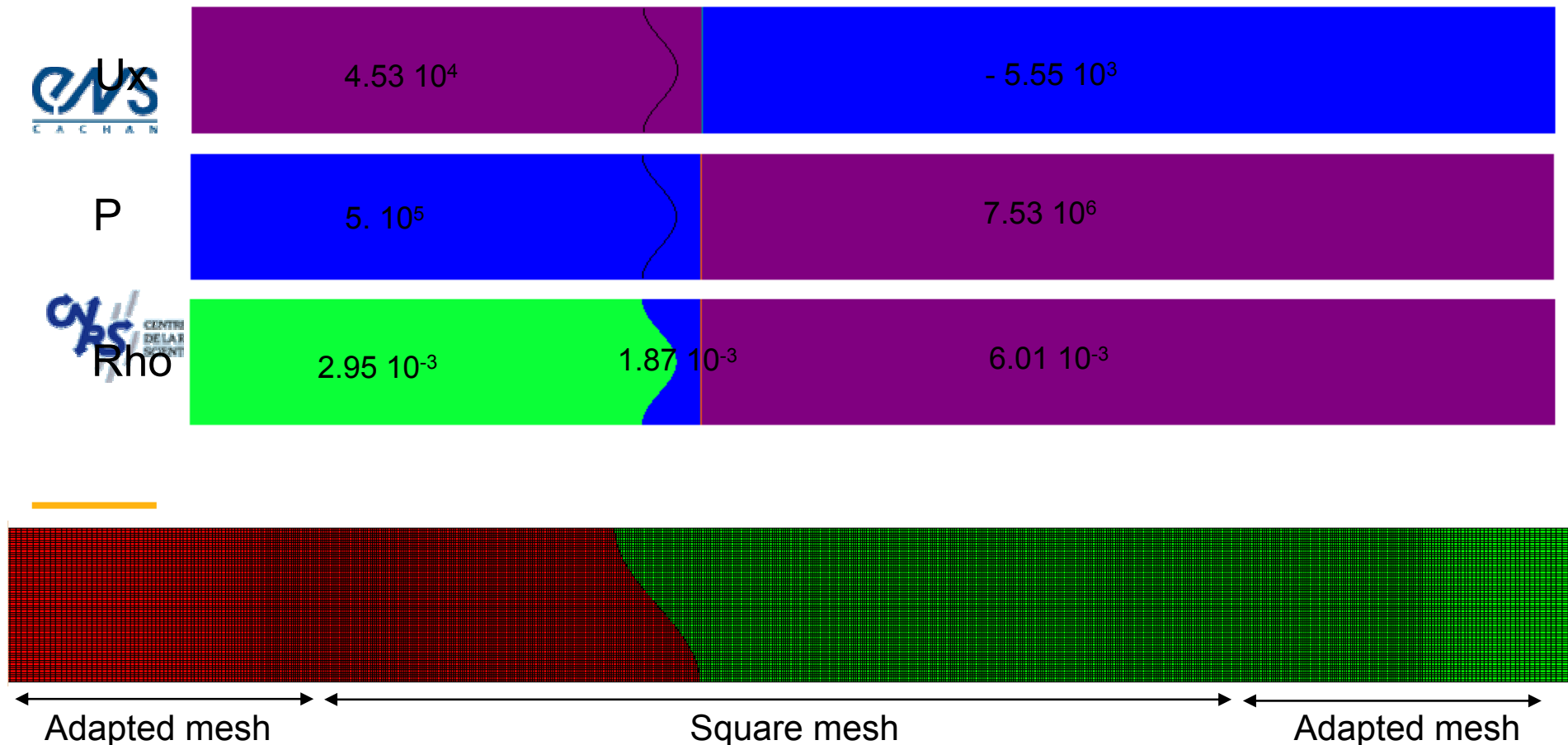
Capture d'interface VFFC-NIP

- Perfect shear test 50x50 cells
 - Velocities at $t=0.25$



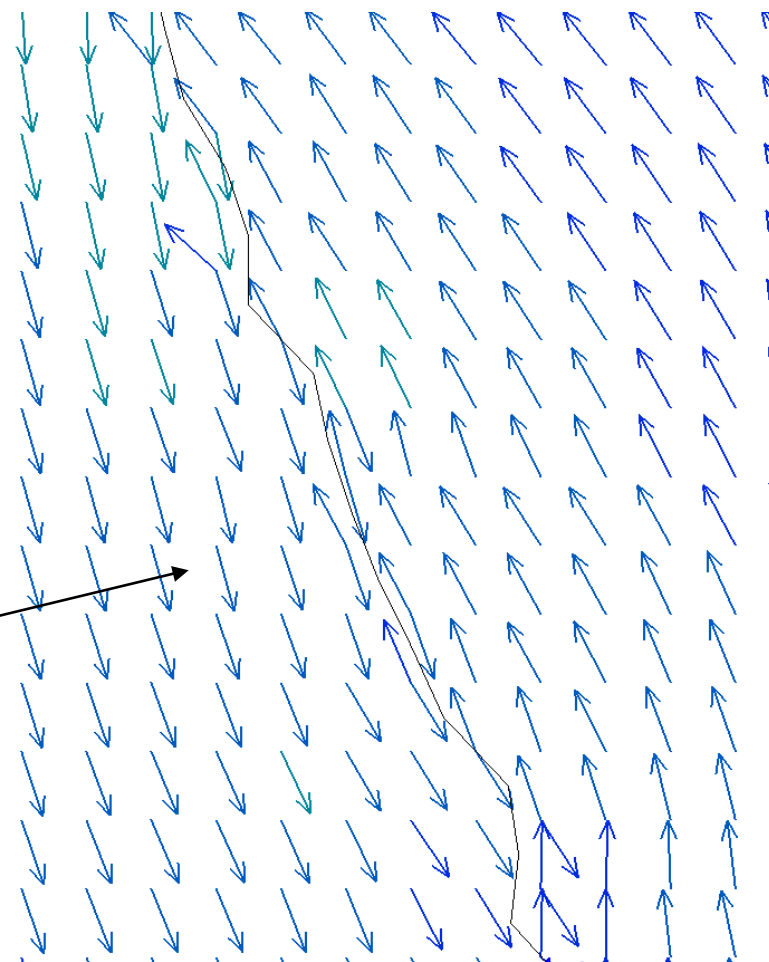
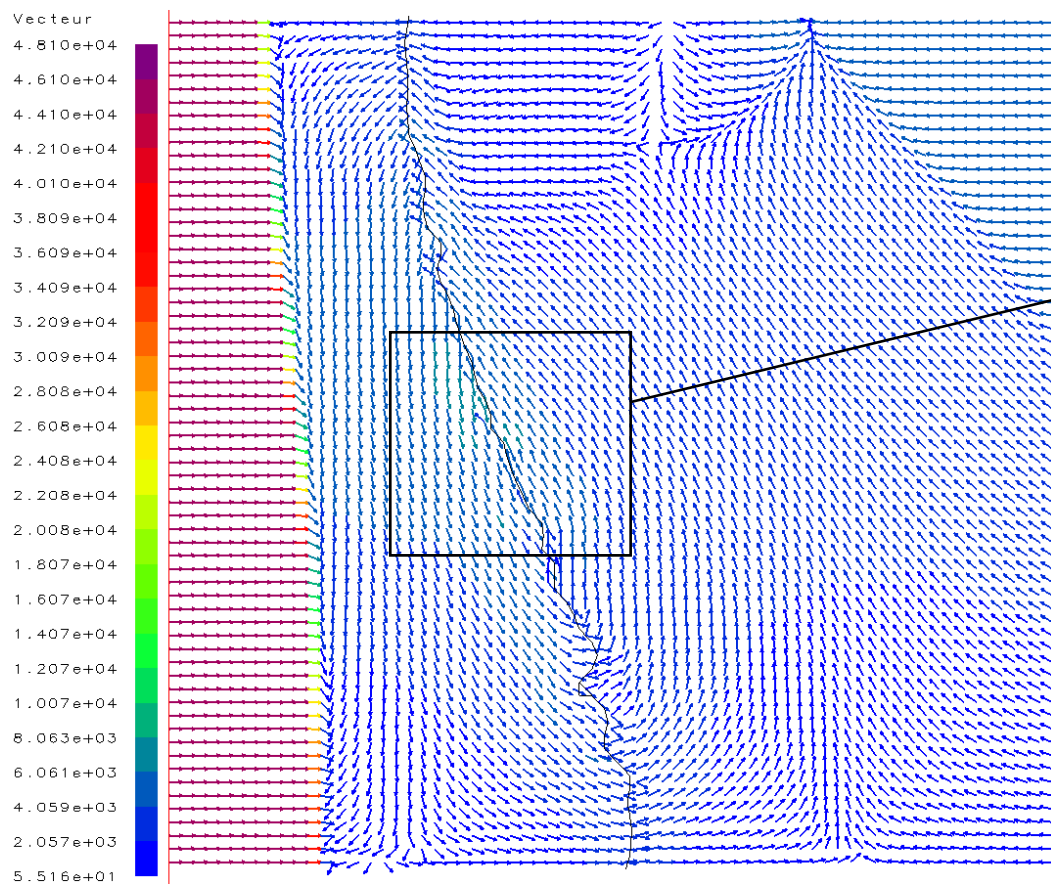
Capture d'interface *VFFC-NIP*

- Richtmyer-Meshkov Instability : Stony-Brook benchmark
 - Half geometry
 - 768x64 cells



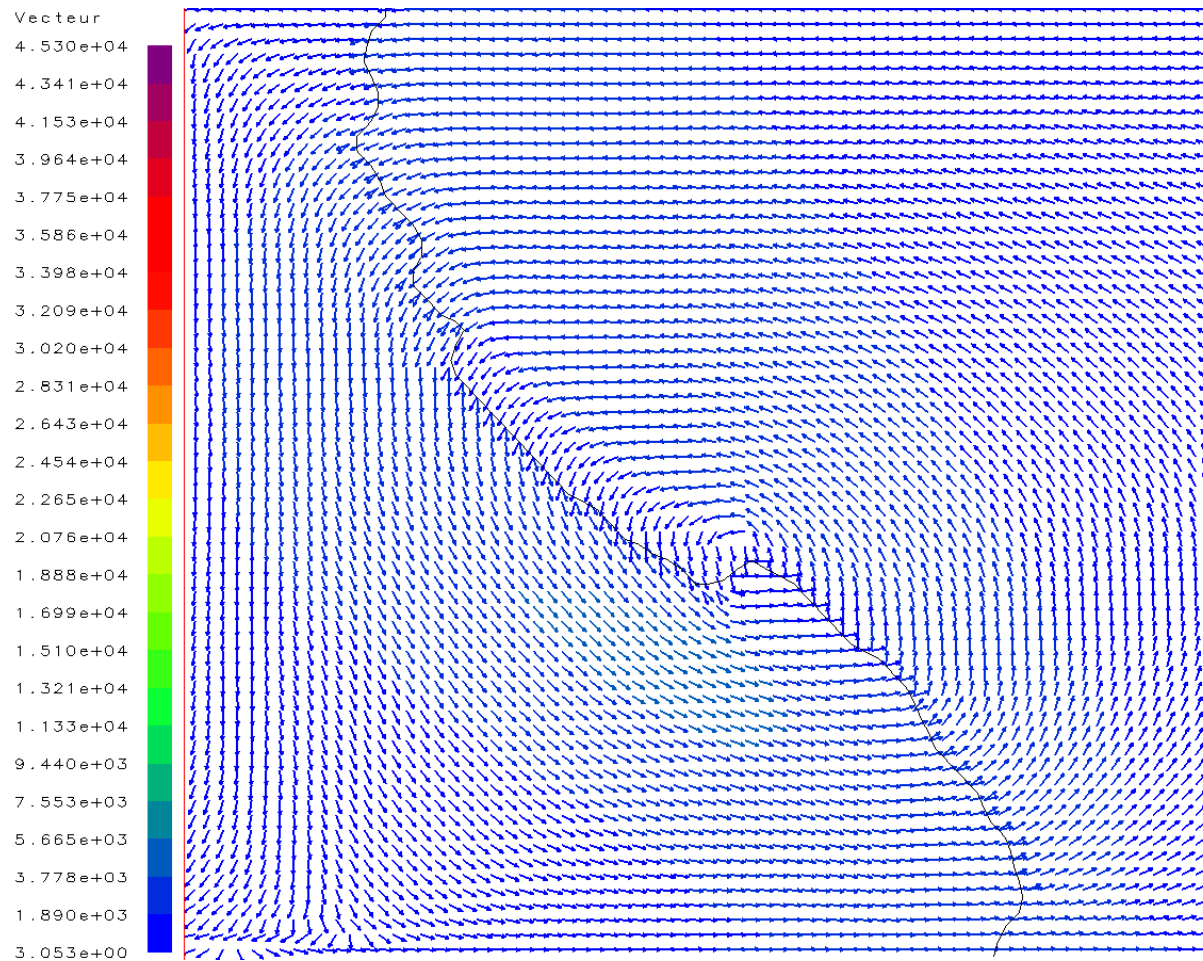
Capture d'interface *VFFC-NIP*

- Richtmyer-Meshkov Instability
 - Perfect shear at early times



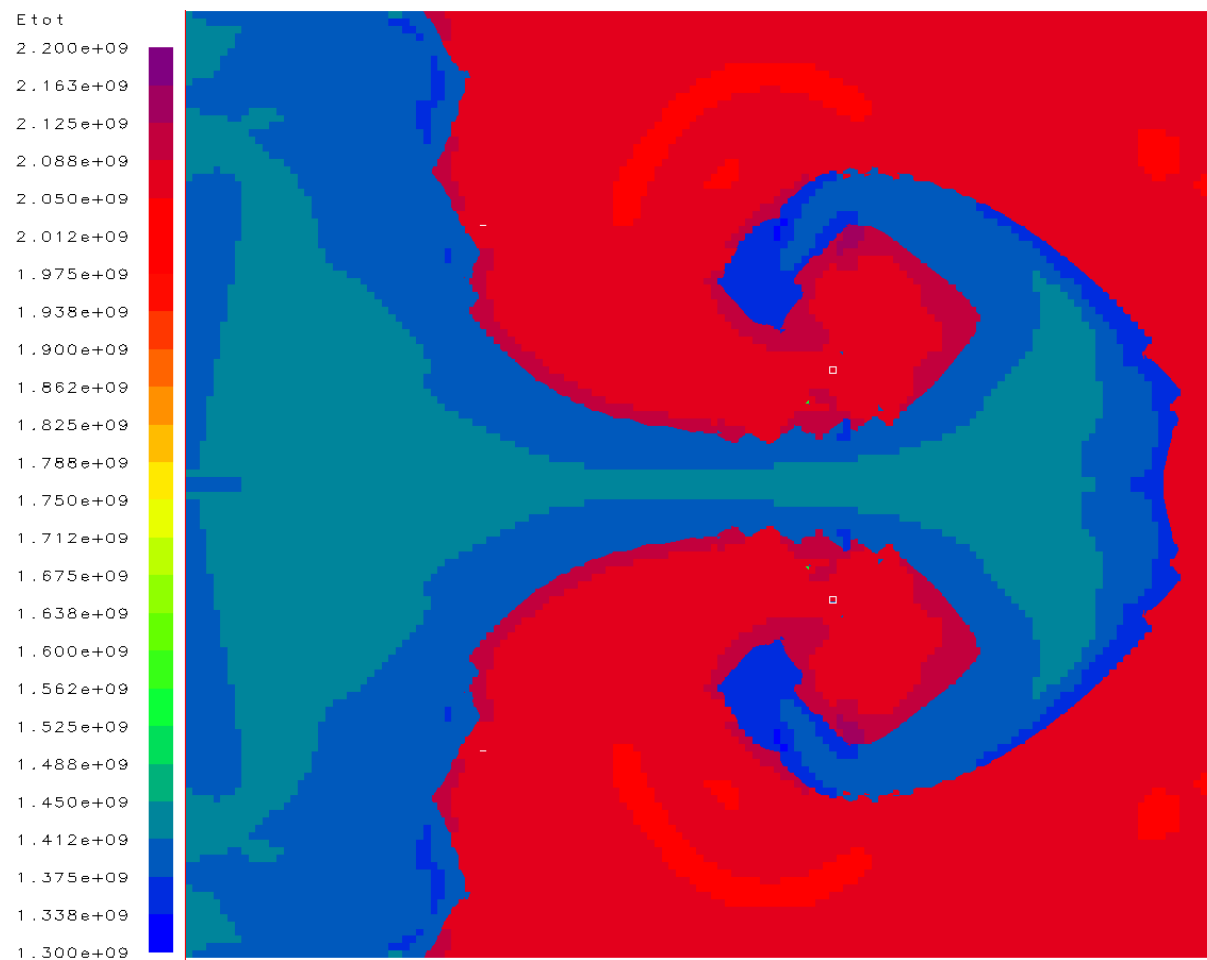
Capture d'interface VFFC-NIP

- Richtmyer-Meshkov Instability
 - Perfect shear becoming a vortex



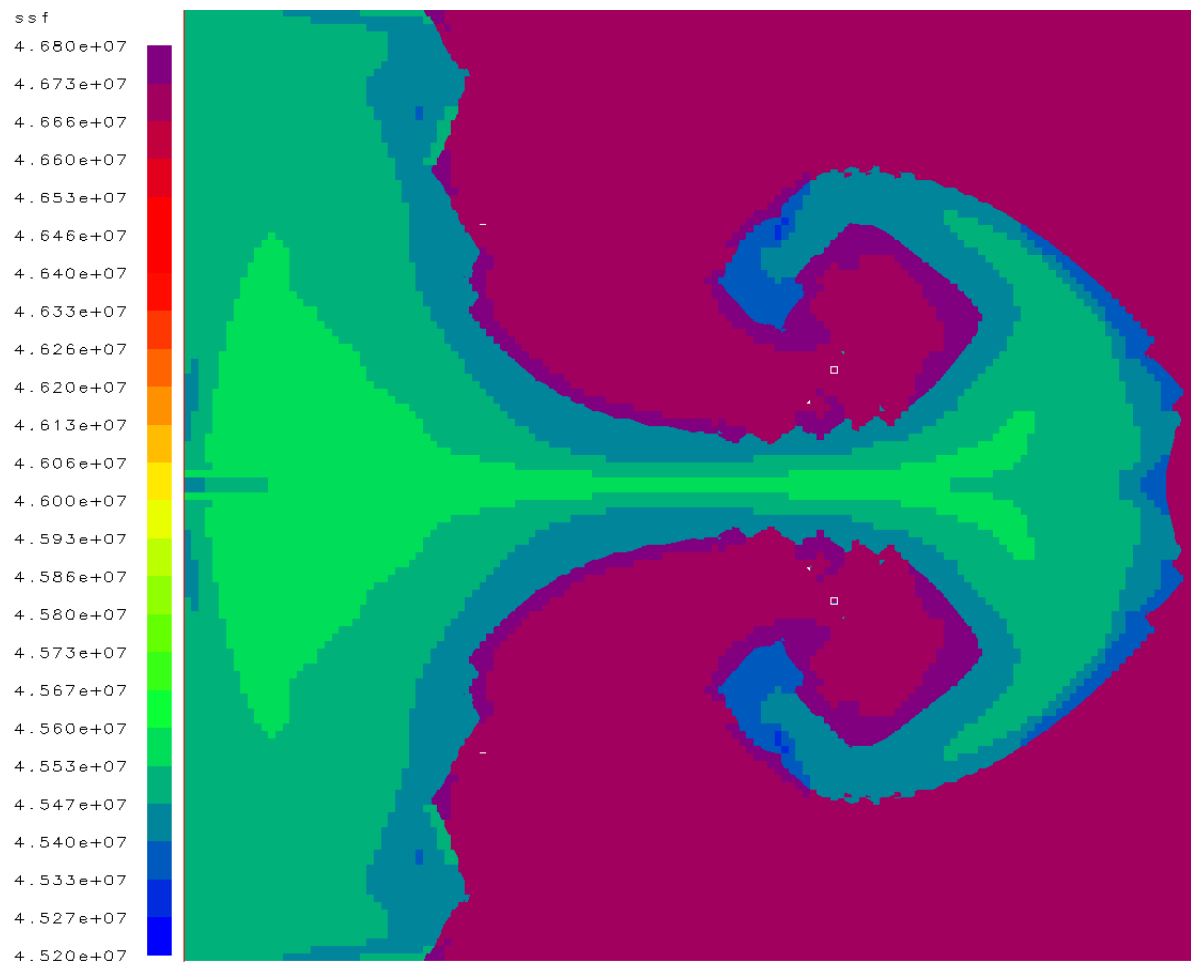
Capture d'interface VFFC-NIP

- Richtmyer-Meshkov Instability
 - Total energy at $t=1$ ms



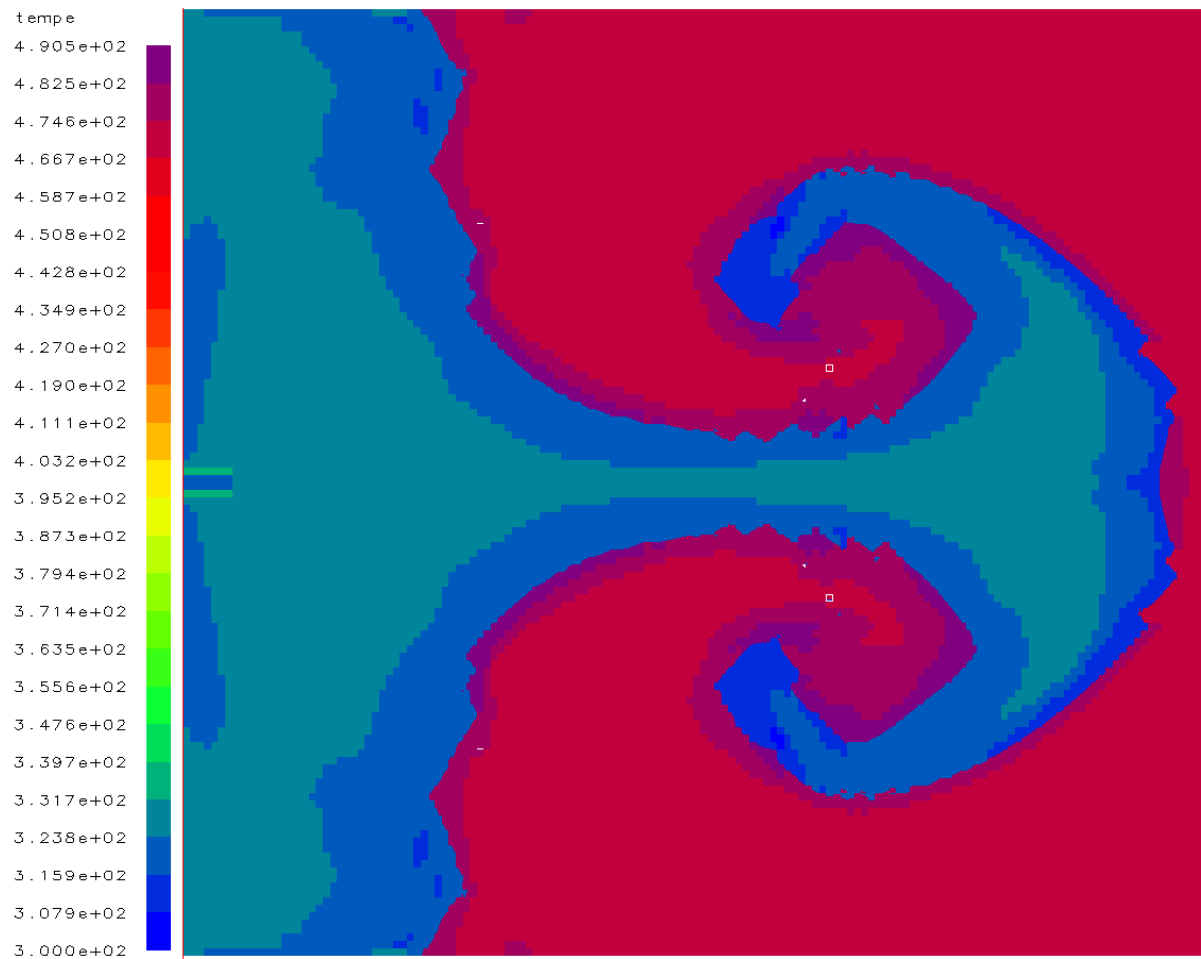
Capture d'interface VFFC-NIP

- Richtmyer-Meshkov Instability
 - Entropy a t=1 ms



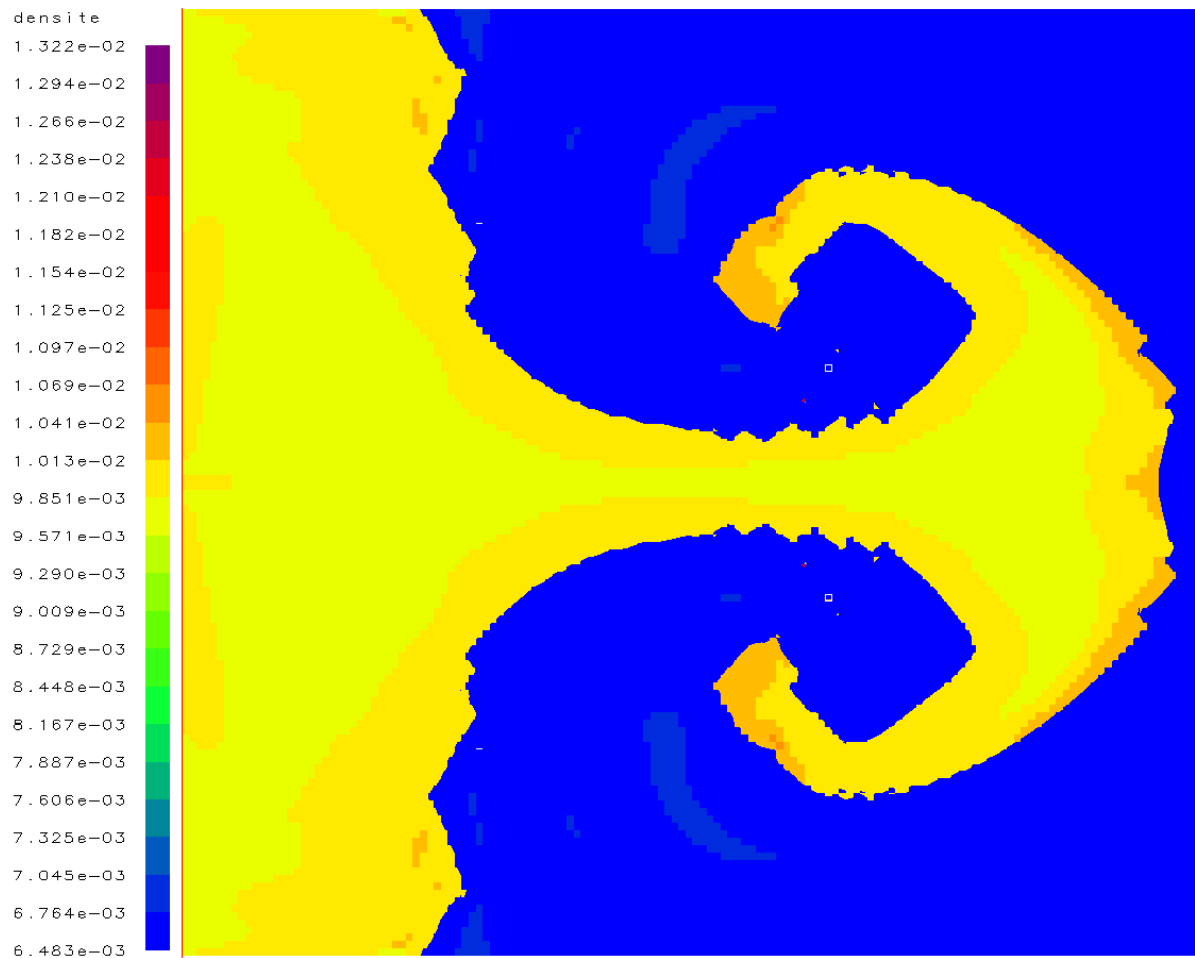
Capture d'interface VFFC-NIP

- Richtmyer-Meshkov Instability
 - Temperature a t=1 ms



Capture d'interface VFFC-NIP

- Richtmyer-Meshkov Instability
 - Density at $t=1$ ms



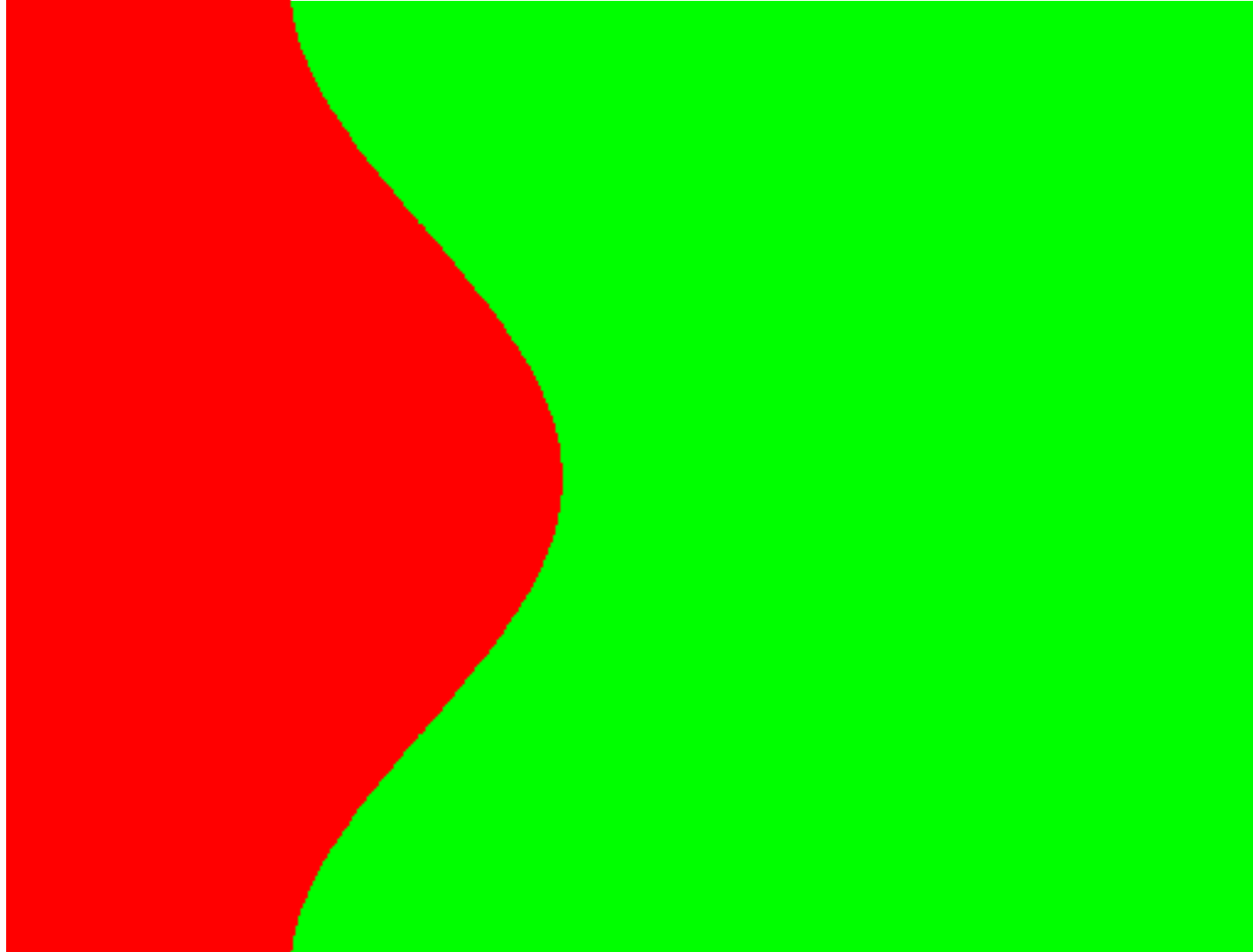
Capture d'interface *VFFC-NIP*

- Richtmyer-Meshkov Instability
 - Pressure at $t=1$ ms



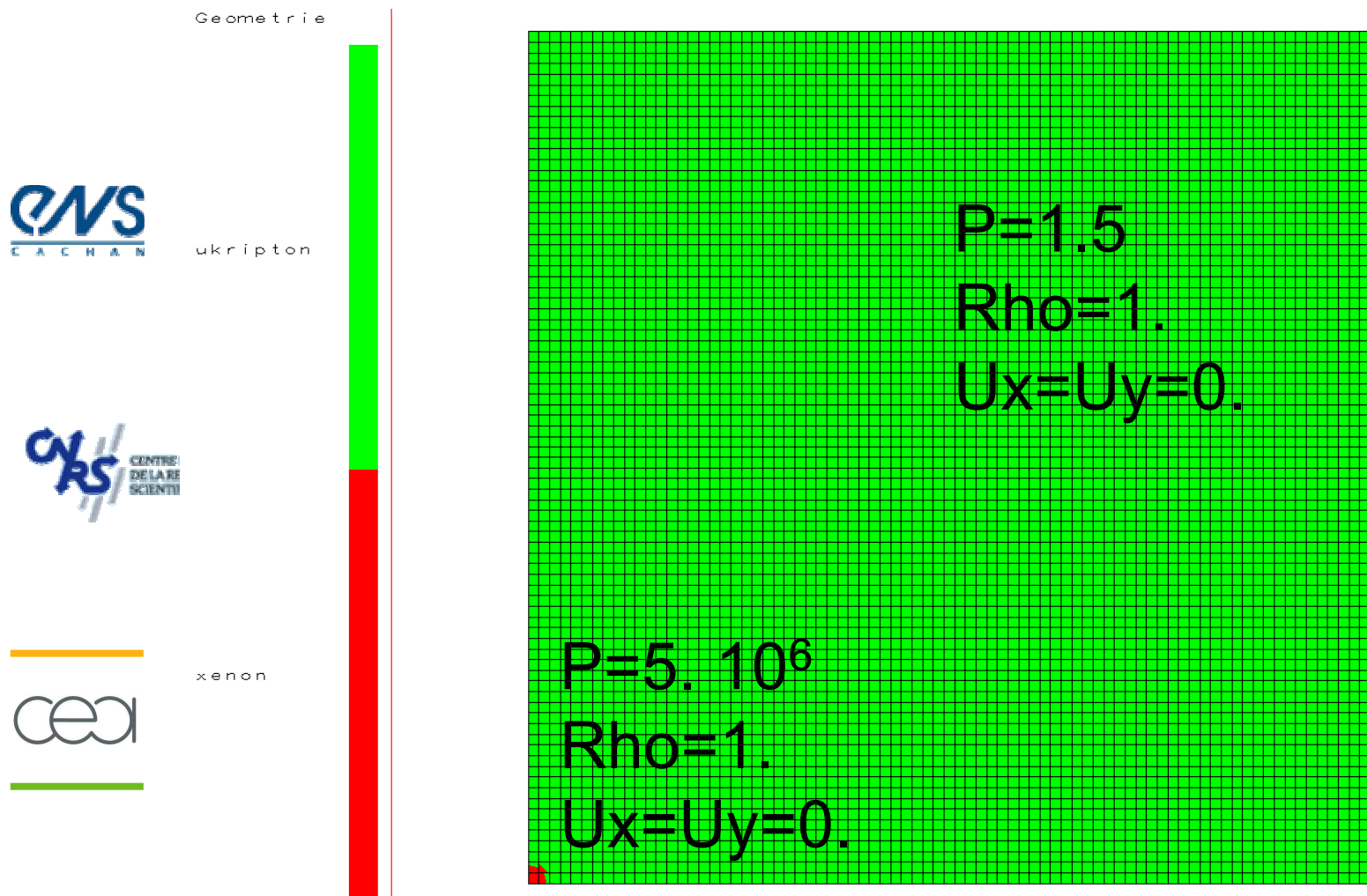
Capture d'interface *VFFC-NIP*

- Richtmyer-Meshkov Instability
 - Video



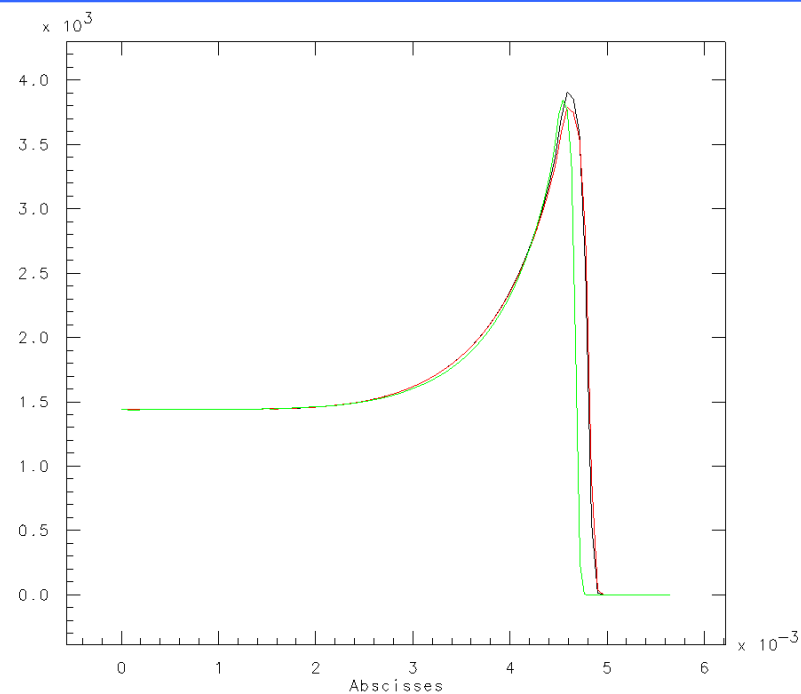
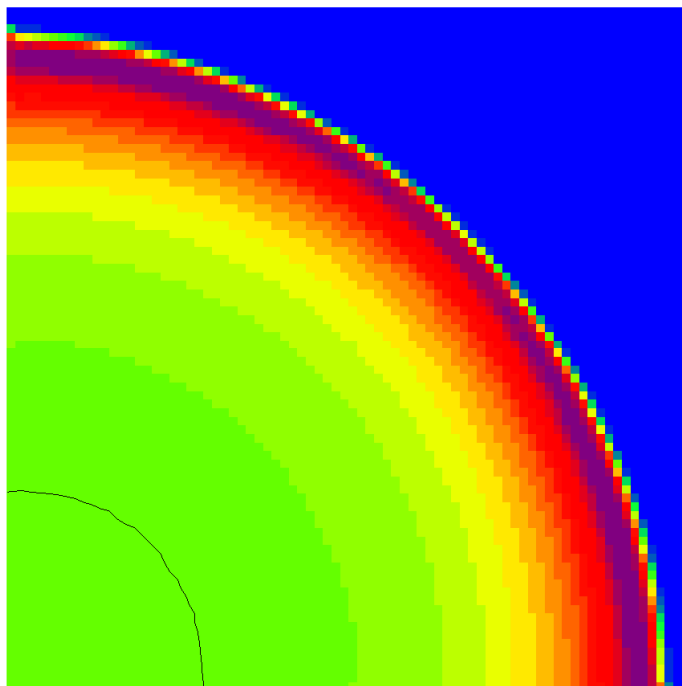
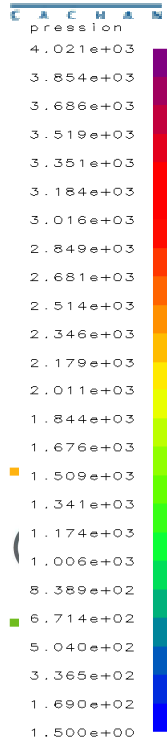
Capture d'interface VFFC-NIP

- Sedov Problem 80x80 cells
 - Initial conditions



Capture d'interface *VFFC-NIP*

- Sedov Problem
 - Pressure $t= 0.26$



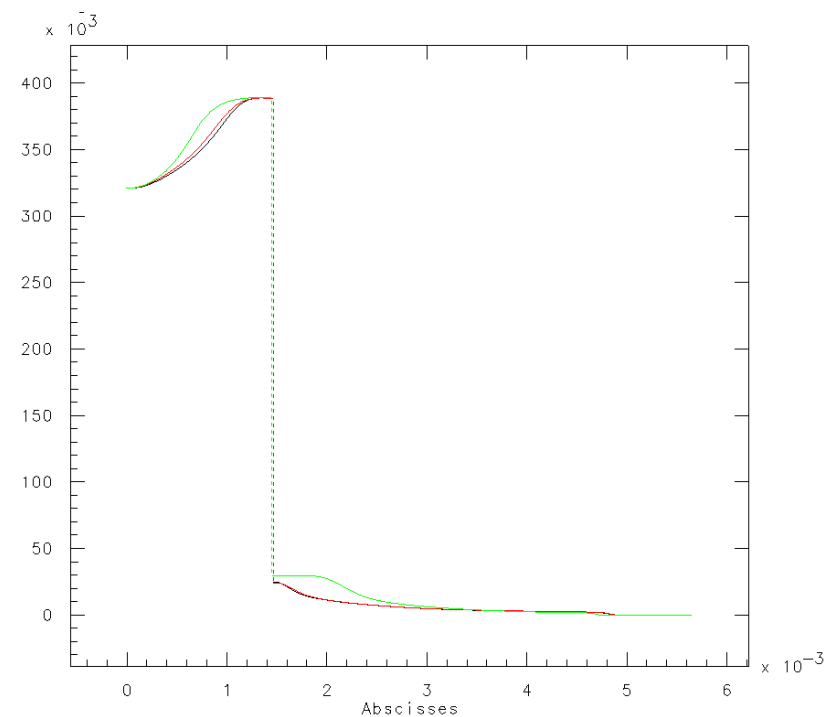
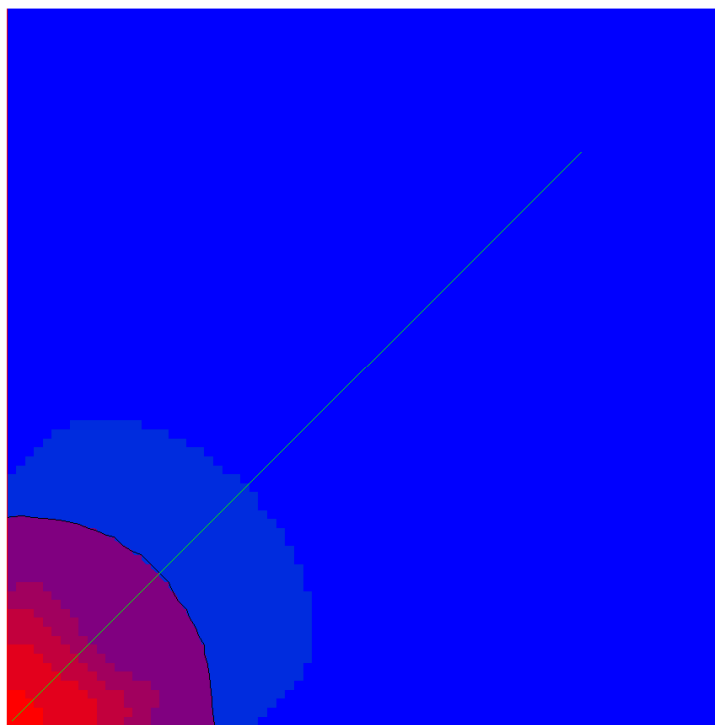
Capture d'interface *VFFC-NIP*

- Sedov Problem
 - Internal energy $t= 0.26$

ENS

energie

3.896e+05
3.733e+05
3.571e+05
3.409e+05
3.246e+05
3.084e+05
2.922e+05
2.760e+05
2.597e+05
2.435e+05
2.273e+05
2.110e+05
1.948e+05
1.786e+05
1.623e+05
1.461e+05
1.299e+05
1.136e+05
9.740e+04
8.116e+04
6.493e+04
4.870e+04
3.247e+04
1.623e+04
2.250e+00



Capture d'interface VFFC-NIP

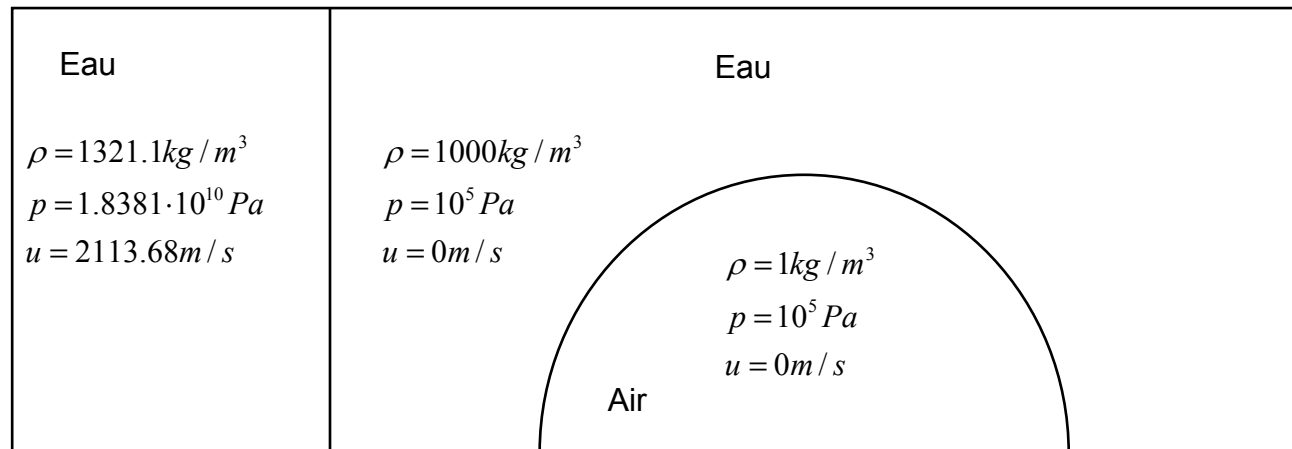
- Interaction d'un choc se propageant dans de l'eau avec une bulle d'air
 - Choc a Mach 6
 - 200x100 mailles
- Equations d'état:

- Eau : $p = (\gamma_{eau} - 1)\rho e - \pi$, avec $\gamma_{eau} = 7$ et $\pi = 21 \cdot 10^8$.

$$c_{300K} = 1450 \text{ m/s}$$

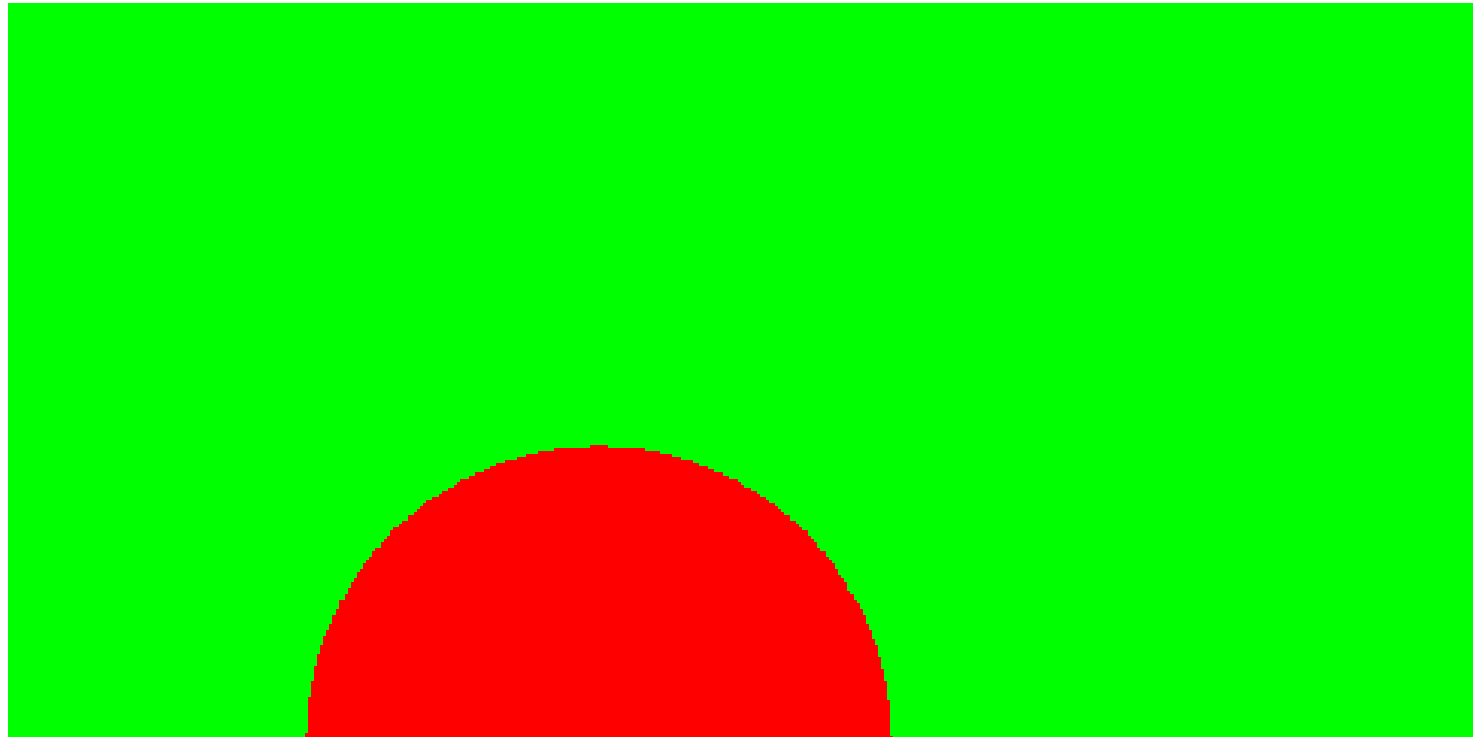
- Air : $p = (\gamma_{air} - 1)\rho e$, avec $\gamma_{air} = 1.4$

$$c_{300K} = 300 \text{ m/s}$$



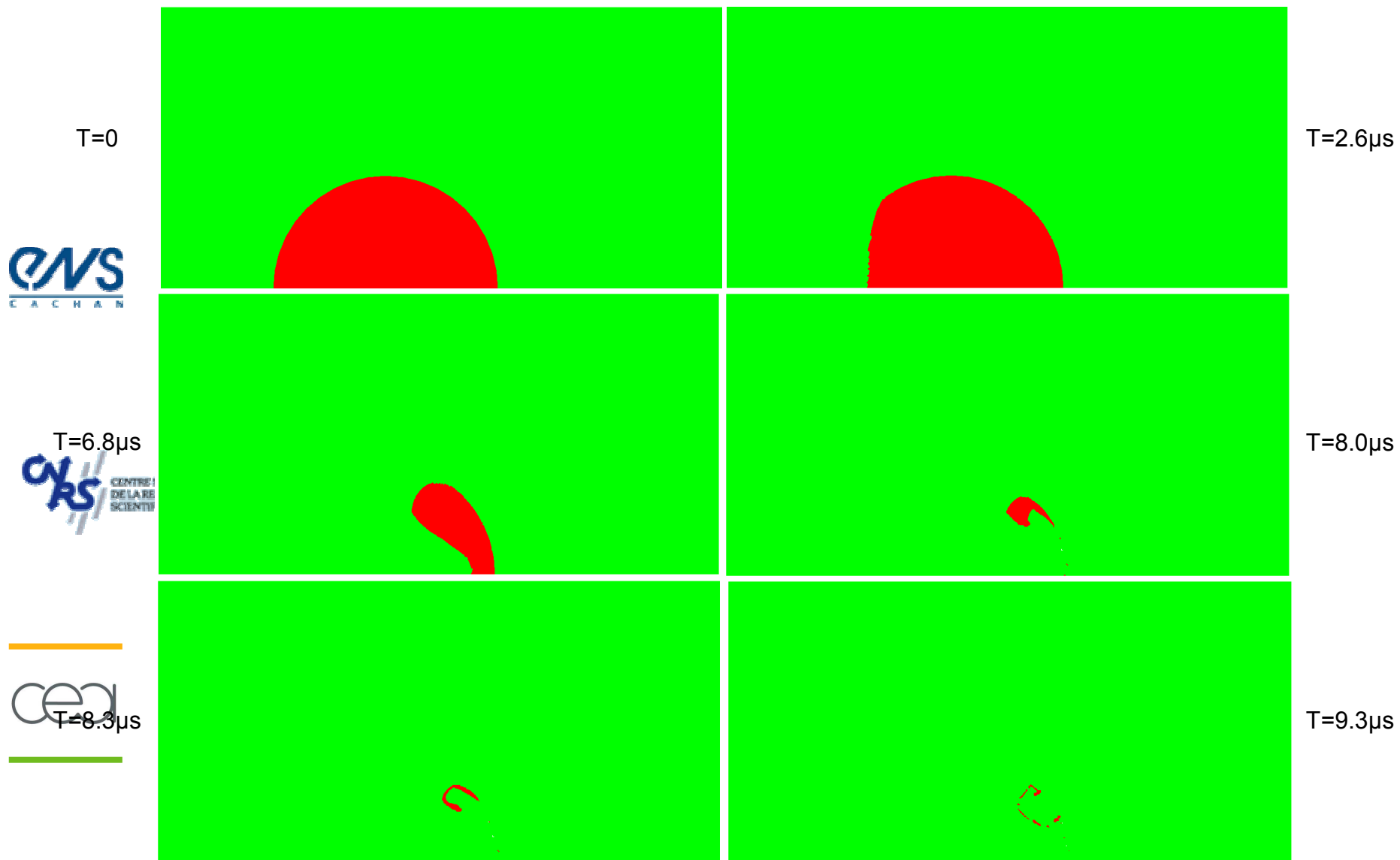
Capture d'interface *VFFC-NIP*

- Video geometrie



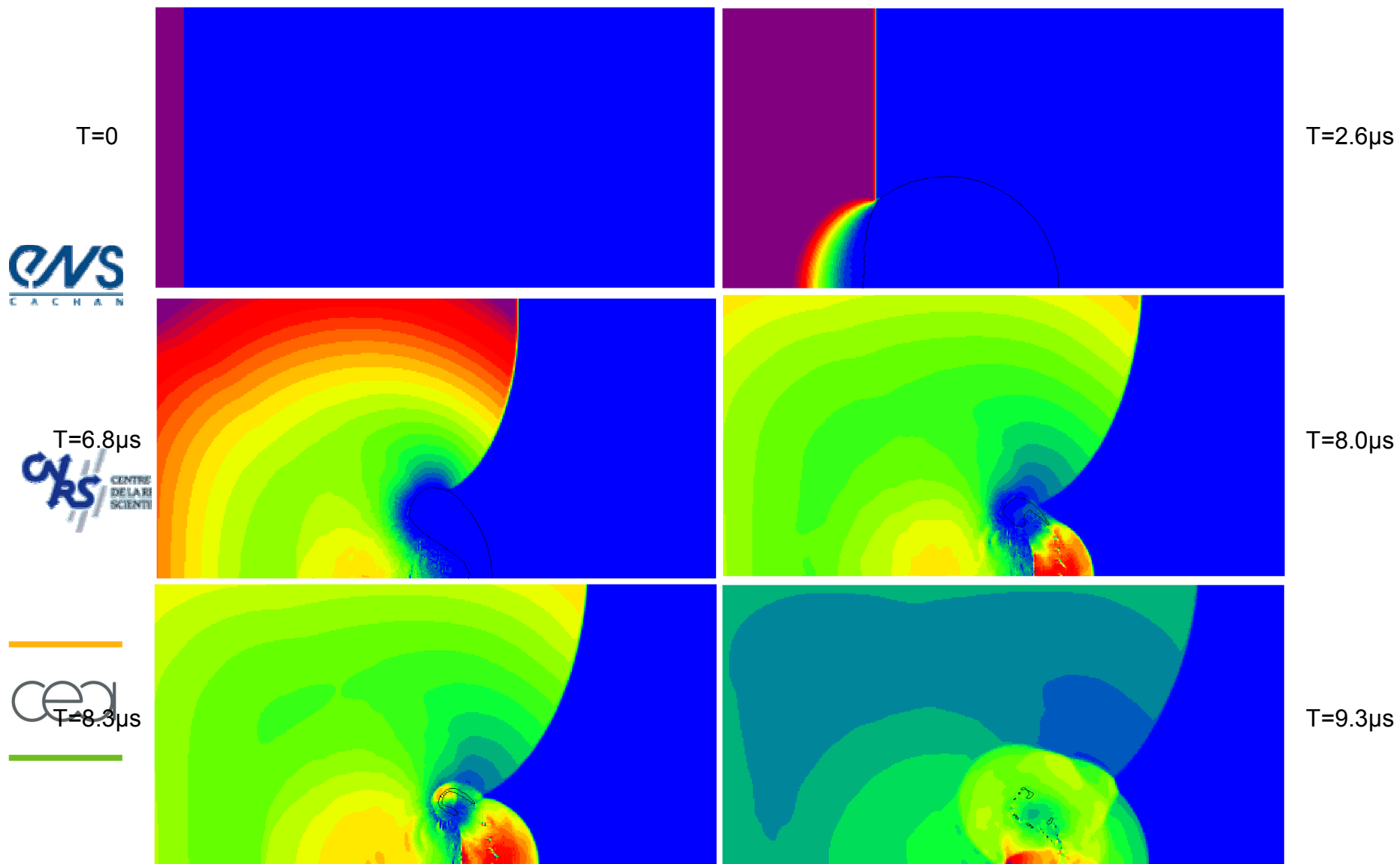
Capture d'interface VFFC-NIP

- Geometrie



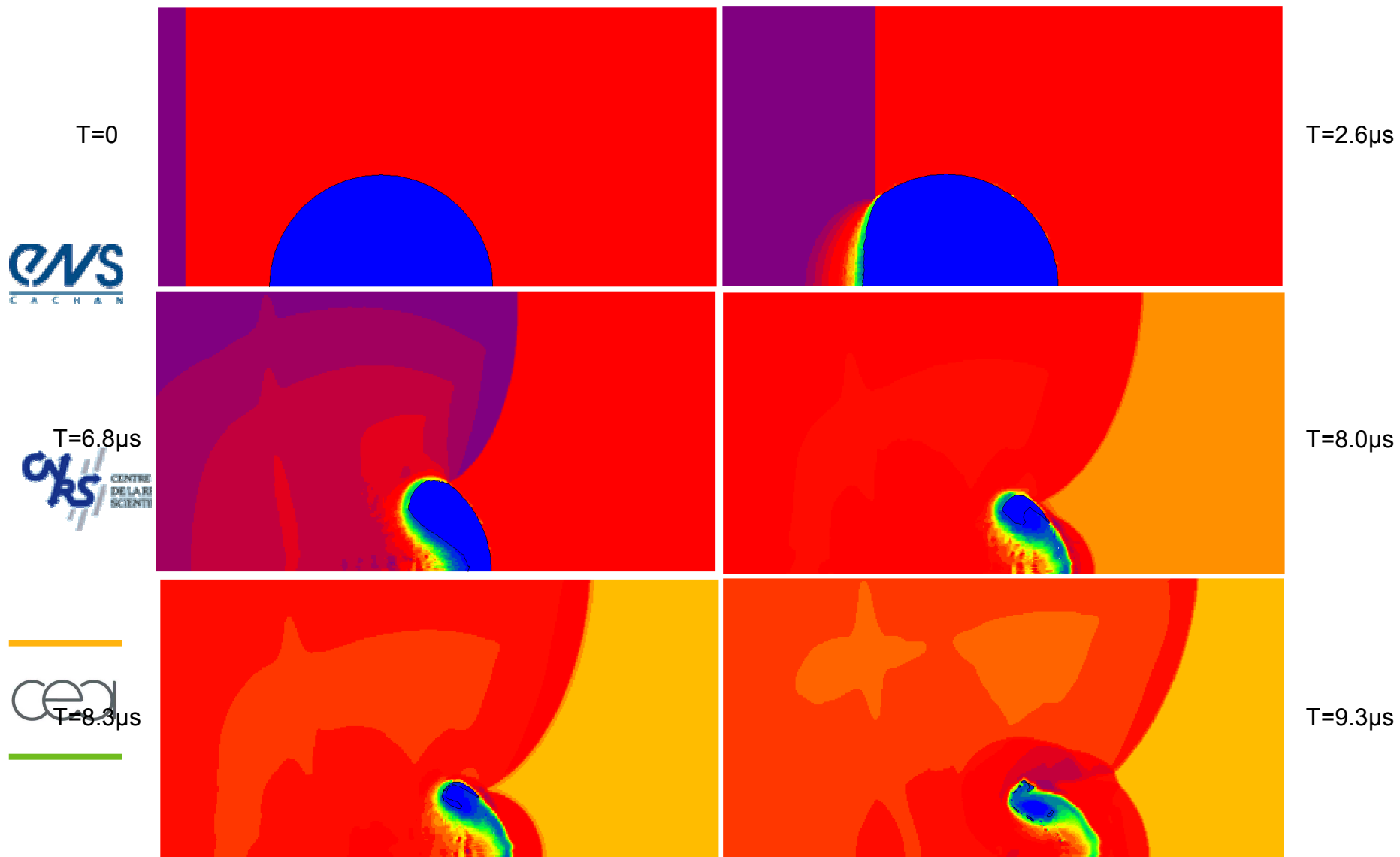
Capture d'interface VFFC-NIP

- Pression



Capture d'interface VFFC-NIP

- Densité



CONCLUSION

- Le glissement parfait entre les matériaux est obtenu avec une méthode eulérienne.
- La méthode est strictement conservative pour toutes les variables
- Des travaux sur la reconstruction d'interface sont en cours pour une méthode de reconstruction d'ordre 2.
- Calcul parallèle



[1]

J.-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, G. Le Coq: *On the numerical solution to two fluid models via a cell centered finite volume method*. Eur. J. Mech. B Fluids 20 (6) (2001) 841-867.

[2]

P. R. Woodward et P. Collela: *The numerical simulation of 2D fluid flow with strong shock*. Journal of Computational Physics, 1984, pp.115-173



[3]

J.-P. Braeunig, B. Desjardins, J.-M. Ghidaglia: *A pure eulerian scheme for multimaterial fluid flows*, soumis aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.



APPROCHE BI-FLUIDES



Présentation d'une plate-forme volumes finis multidimensionnels

Jean-Michel Rovarch
rovarch@cmla.ens-cachan.fr

Cargèse - 25/29 septembre 2006



Motivation

Outil complet de résolution numérique de systèmes d'e.d.p. :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) + \sum_{j=1}^{nd} \tilde{C}_j(v) \frac{\partial v}{\partial x_j} + D(v) \frac{\partial v}{\partial t} = \tilde{S}(v) \quad (1)$$

comprenant :

- Outils de pré-traitement (Géométries - Maillages)
 - Maillages VF : structurés ou non, conformes ou non
- Code de calculs numériques
 - Pas de contrainte C.F.L.
 - libre choix du modèle
- Outils de post-traitement

Modèle à six équations d'écoulements diphasiques

Pour chaque phase $k = \{g, l\}$:

conservation de la masse

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k = \Gamma_k,$$

conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_k (\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k + p \mathbf{I}) - p \nabla \alpha_k = \alpha_k \rho_k \mathbf{g} + \Gamma_k \mathbf{u}_{ik} + M_{ik},$$

conservation de l'énergie

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k E_k)}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_k \rho_k H_k \mathbf{u}_k + p \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \alpha_k \rho_k \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_k + \Gamma_k H_{ik} + M_{ik} \cdot \mathbf{u}_{ik} + Q_{ik}.$$

+ Relations de fermeture

Difficultés des écoulements diphasiques

- présence de produits non conservatifs
- opérateurs de convection généralement non hyperboliques
- solutions à forts gradients
- termes sources raides
- ...
- pas de consensus sur la modélisation

→ Code de simulation numérique qui laisse le libre choix du modèle à utiliser

→ Méthode numérique précise et robuste à toute modélisation

Méthode des Volumes Finis

Soit $\Omega = \cup_{K \in \mathcal{T}} K$, nous cherchons :

$$v_K(t) \equiv \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K v(x, t) dx.$$

Le système (1) se réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) + \sum_{j=1}^{nd} C_j(v) \frac{\partial v}{\partial x_j} = S(v). \quad (2)$$

L'intégration de (2) sur K implique :

$$\text{vol}(K) \frac{dv_K}{dt} = - \int_{\partial K} F_n(v) d\sigma - \int_K \sum_{j=1}^{nd} C_j(v) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_K S(v) dx,$$

Méthode des Volumes Finis

- Flux normal au bord de K

$$\int_{\partial K} F_n(v) d\sigma = \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{K \cap L} F_{n_{K,L}}(v) d\sigma \approx |K \cap L| \Phi(v_K, v_L; K, L),$$

- terme non conservatif

$$\int_K \sum_{j=1}^{nd} C_j(v) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \approx \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |K \cap L| E_{n_{K,L}}(\Phi(v_K, v_L; K, L) - F_{n_{K,L}}(v_K)),$$

où $E_n(v) \equiv C_n(v) J_n(v)^{-1}$, $J_n(v) \equiv \frac{\partial F_n(v)}{\partial v}$,

- terme source

$$\int_K S(v) dx \approx \text{vol}(K) S(v_K).$$

$$\frac{dv_K}{dt} = -\frac{1}{\text{vol}(K)} \sum_{L \in \mathcal{V}(K)} |K \cap L| ((I + E_{n_{K,L}}) \Phi(v_K, v_L; K, L) - E_{n_{K,L}} F_{n_{K,L}}(v_K)) + S(v_K).$$

Schéma *Volumes Finis* à Flux Caractéristiques

(G. Le Coq, J.M. Ghidaglia, A. Kumbaro)

L'écriture de l'équation des flux et sa linéarisation sur l'interface séparant les cellules K et L conduit à l'équation du flux $F_{K,L} = \int_{K \cap L} F(v(\sigma, t)) \cdot n_{K,L} d\sigma$:

$$\frac{\partial F_{K,L}}{\partial t} + \tilde{A}_{n_{K,L}}(\mu) \frac{\partial F_{K,L}}{\partial \nu} = |K \cap L| J_{n_{K,L}}(\mu) S(\mu),$$

où $\tilde{A}_n(v) = J_n(v)(I + E_n(v))$ et ν dépend uniquement de la géométrie du maillage.

La méthode des caractéristiques conduit au flux numérique Φ qui se lit :

$$\Phi(v_K, v_L; K, L) = \frac{F_{n_{K,L}}(v_K) + F_{n_{K,L}}(v_L)}{2} - U(\mu_{K,L}) \frac{F_{n_{K,L}}(v_L) - F_{n_{K,L}}(v_K)}{2},$$

où $U(v) = \text{sgn}(\tilde{A}_n(v)) = P \text{Diag}(\text{sign}(\text{Re}(\lambda_i)))_{i=1,m} P^{-1}$.

Implicitation du Schéma en Variables Physiques

- Afin de préserver les propriétés physiques de conservation, Résolution du schéma numérique en $v = \{\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 u_1, \dots\}$: $S(V^{n+1}) = 0$
- les valeurs numériques des variables physiques $(\alpha_k, \rho, u_k, \dots)$ doivent être connues :
 - pour prendre en compte les lois d'états (en particulier, lois tabulées)
 - pour itérer le schéma (termes non explicites en v)
- $\exists w$, un ensemble de variables physiques tel que $v = \psi(w)$, fortement lié aux équations d'états qui gouverne le modèle.
exemple : $w = \{\alpha_1, \rho, u_1, u_2, s_1, s_2\}$ pour e.o.s. (p, s)

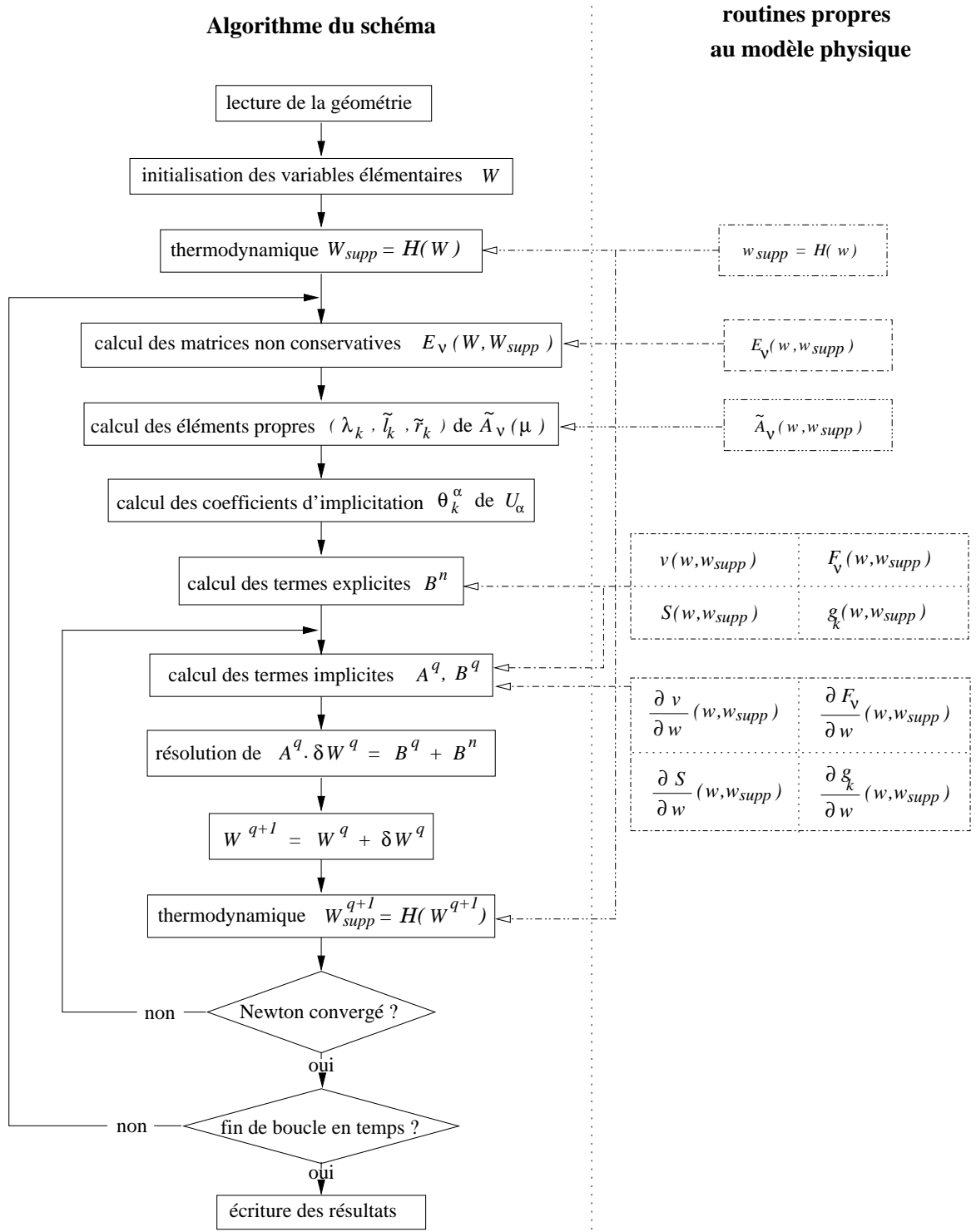
résolution directe de $S(\psi(W^{n+1})) = 0$

Implicitation du Schéma en Variables Physiques

Avantages

- version implicite du schéma \mathcal{S} : 1 méthode itérative au lieu de 2
version explicite du schéma \mathcal{S} : temps de calcul identique
- la méthode reste conservative
- termes explicites en w , $\frac{\partial}{\partial v}$ est remplacée par $\frac{\partial}{\partial w}$
⇒ modification rapide du modèle physique
- Cadre général ⇒ **code indépendant de tout modèle physique**
Introduction du modèle *via* les routines de calculs de
 $v(w)$, $F_\nu(w)$, $E_\nu(w)$, $S(w)$, $\partial_w v(w)$, $\partial_w F_\nu(w)$, $\partial_w S(w)$

Algorithme



Maquette d'écriture des modèles physiques

Logiciels de calculs formels (Maple V)

- effectuent des calculs fastidieux (jacobiennes, inversions de matrices, ...)
- capables de traduire les expressions langages de programmation (C, Fortran, TeX, HTML)

La maquette : une interface entre le code et son utilisateur

- Écriture des modèles sous forme d'instructions Maple V
- Calcul des composantes utiles au schéma
- génération automatique de code et de documentation

Avantages

- calculs des termes physiques et génération de code rapides et fiables
- facilite les modifications du modèle
- conserve une trace lisible des modèles étudiés et implémentés
- facilite les échanges dans les collaborations
- associée au code \Rightarrow outil performant de test et de valid. de modèles physiques

SALOME

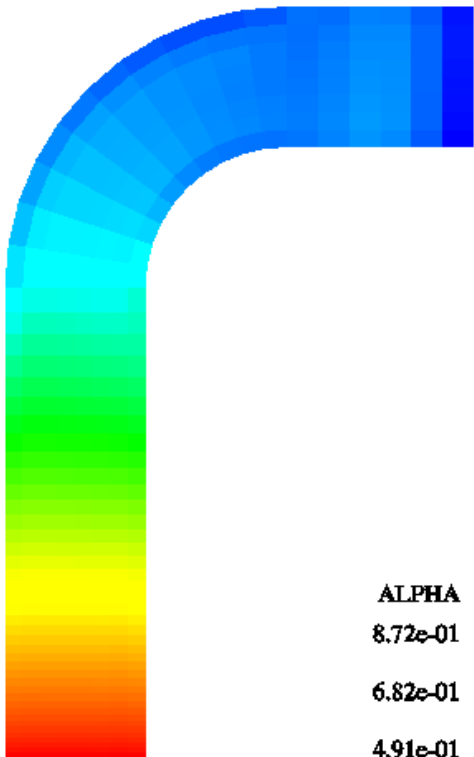
Projet labellisé RNTL (<http://www.industrie.gouv.fr/rntl>), regroupant 21 partenaires : industriels (CEA, EDF, ...), centres de recherche (INRIA, ...), éditeurs de logiciel (Open Cascade, ...) laboratoires de recherche universitaires (LMA, LAN, ...)

Objectif :

Plate-forme "Open Source" qui offre aux codes de calcul un environnement intégré prenant en charge les aspects Pré/Post-processing, couplages de codes multi-physiques, multi-échelles, orientée vers la haute performance.

Avantages :

- réduit les temps et les coûts de développements
- permet d'intégrer une communauté et donc d'accéder à son savoir-faire
- favorise la diffusion des codes (*i.e.* augmentent leur nombre d'utilisateurs et donc les retours d'expérience)
- ...



ALPHA

8.72e-01

6.82e-01

4.91e-01

3.01e-01

1.10e-01



PRESSION

7.66e+06

6.20e+06

4.73e+06

3.26e+06

1.79e+06