Quelques éléments sur les solutions discontinues de systèmes de lois de conservation en mécanique des fluides

Jean-Michel GHIDAGLIA
Centre de Mathématiques et de Leurs Applications
Ecole Normale Supérieure de Cachan et CNRS URA 1611
61 Av. du Pdt Wilson
94235 Cachan Cedex, France

24 mai 2000

Résumé

Nous rassemblons quelques éléments sur les solutions discontinues de systèmes de lois de conservations : solutions faibles, entropie, ondes simples,... Nous illustrons notre propos dans le contexte de la dynamique des gaz (écoulements multidimensionnels, problème de Riemann).

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Solutions faibles, quelques exemples **2**
- 2.1 Solution discontinue, relation de Rankine-Hugoniot . . . 3
- 2.2 Condition d'entropie . . . 4
- 2.3 Ondes de raréfaction . . . 8
- 2.4 Discontinuité de contact . . . 11
- 2.5 Profils visqueux . . . 13
- 2.6 Formulations non conservatives . . . 14

3 Dynamique des gaz **16**
- 3.1 Généralités . . . 16
- 3.2 Applications aux gaz parfaits . . . 19
- 3.3 Ecoulements multidimensionnels . . . 21
  - 3.3.1 Variables conservatives . . . 21
  - 3.3.2 Variables non-conservatives . . . 22
- 3.4 Résolution du problème de Riemann . . . 24
  - 3.4.1 Ondes de choc . . . 25

3.4.2 Ondes de raréfaction (détentes) 25
3.4.3 Discontinuités de contact 26
3.4.4 Construction de la solution du problème de Riemann . . . 26

1 Introduction

Notre objet est de décrire quelques solutions discontinues, pertinentes du point de vue physique, pour des systèmes de lois de conservation en plusieurs dimension (physique) d'espace. Nous considérons donc des systèmes de lois de conservations :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(v)}{\partial x_i} = 0, \tag{1.1}$$

où $v = (v_1, ..., v_m) \in I\!R^m$ et $v_k = v_k(x,t), x \in I\!R^n, \quad t \geqslant 0$.
Selon la situation, x pourra être restreint à un ouvert (borné ou non) Ω de l'espace $I\!R^n$ et v pourra être assujetti à prendre ses valeurs dans un ouvert G de $I\!R^m$. Nous sommes guidés par la volonté de tester certains schémas numériques d'intégration introduits dans Le Coq [2] et Ghidaglia [1]. Ainsi nous souhaitons disposer à la fois de solutions particulières et de renseignements qualitatifs généraux sur les solutions de (1.1).

Nous rassemblons donc ci-après un certain nombre de résultats qui sont pour la plupart disséminés dans la littérature.

La section suivante est consacrée à la construction et à l'étude de solutions faibles (c'est à dire au sens des distributions) de (1.1). Nous y discutons aussi la relation entre multiplicité et entropie. La 3ème Section est consacrée à l'étude de certains systèmes de la dynamique des gaz (équations d'Euler). Cette section se terminant par la construction de la solution du problème de Riemann monodimensionnel dans le cas des gaz parfaits polytropiques.

2 Solutions faibles, quelques exemples

Considérons le système (nous nous restreignons pour la simplicité de l'exposé au cas ou $n = 1$) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0, \quad x \in I\!R,\ t > 0, \tag{2.1}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \tag{2.2}$$

où $v \in G$ un ouvert de $\mathbb{R}^m, m \geqslant 1$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est régulière.

Dans ce qui suit, nous supposerons que la donnée initiale v_0 est de la forme

$$v_0(x) = \begin{cases} v_g & \text{pour} \quad x < \xi \\ v_d & \text{pour} \quad x > \xi \end{cases} \tag{2.3}$$

où ξ est un point donné de l'axe réel $\mathbb{R}$. Nous simulerons (2.1) sur un intervalle $[0, 2\xi]$ et imposerons numériquement aux bornes du domaine une condition de Neumann

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(2\xi, t) = 0. \tag{2.4}$$

Compte tenu de la vitesse finie de propagation[1] des pertubations pour (2.1), nous sommes assurés que pour des temps assez petits,

$$v(0,t) = v_g, \quad v(2\xi, t) = v_d, \tag{2.5}$$

disons pour $t < T^*(v_g, v_d)$.

2.1 Solution discontinue, relation de Rankine-Hugoniot

Considérons une solution faible de (2.1) qui a la structure suivante :

$$v(x,t) = \begin{cases} v_g(x,t) \text{ pour } x < \sigma(t), \\ \\ v_d(x,t) \text{ pour } x > \sigma(t), \end{cases} \tag{2.6}$$

où $\Sigma = \{(\sigma(t), t)\}$ est une courbe régulière du demi plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, v_g et v_d étant des fonctions régulières solutions de (2.1). Rappelons alors la

Définition 1 *Une fonction mesurable et localement bornée $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to G \subset \mathbb{R}^m$ est solution faible de (2.1) - (2.2) si pour toute fonction φ de classe C^∞ et à support compact dans $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, on a*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}.v + \frac{\partial \varphi}{\partial x}.f(v) \right) dx\ dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) v_0(x) dx. \tag{2.7}$$

On vérifie alors aisément par intégration par partie que, désignant par $[v]$ le saut de v sur Σ :

1. Celà sous-entend que ce système est hyperbolique.

$$[v](t) = \lim_{x \to \sigma(t)^+} v_d(x,t) - \lim_{x \to \sigma(t)^-} v_g(x,t), \tag{2.8}$$

et avec les notations et hypothèses qui précèdent on a le résultat suivant.

Théorème 1 *Relations de Rankine-Hugoniot. La fonction v définie en (2.6) est solution faible de (2.1) - (2.2) si et seulement si pour tout $t \geqslant 0$,*

$$[f(v)](t) = \frac{d\sigma}{dt}(t)[v](t). \tag{2.9}$$

Ainsi dans le cas où le saut a lieu sur une droite $\sigma(t) = \xi + st$ et où $v_g(x,t) \equiv v_g$, $v_d(x,t) \equiv v_d$ on trouve

$$f(v_g) - f(v_d) = s(v_g - v_d). \tag{2.10}$$

La relation (2.10) peut aussi être lue à l'envers, i.e. étant donné v_d, (2.10) permet de trouver les vecteurs v_g qui peuvent être reliés à v_d par un choc (attention s est aussi une inconnue).

Traitons l'exemple du p-système.

Exemple 2.1. Ici $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, m = 2, v = (\rho, \rho u), f(u) = (\rho u, \rho u^2 + p(\rho))$ où $p'(\rho) > 0$. Dans ce cas (2.10) s'écrit $(p_g = p(\rho_g), p_d = p(\rho_d))$,

$$\begin{cases} \rho_g u_g - \rho_d u_d = s(\rho_g - \rho_d), \\ \rho_g u_g^2 + p_g - \rho_d u_d^2 - p_d = s(\rho_g u_g - \rho_d u_d). \end{cases} \tag{2.11}$$

On trouve alors si $\rho_g \neq \rho_d$ (sinon $u_g = u_d$),

$$s = \frac{\rho_g u_g - \rho_d u_d}{\rho_g - \rho_d}$$

$$u_g = u_d \pm \sqrt{(p_g - p_d)(\frac{1}{\rho_d} - \frac{1}{\rho_g})}. \tag{2.12}$$

Ainsi (2.10) possède ici deux solutions.

2.2 Condition d'entropie

L'exemple que nous venons de traiter montre que lorsqu'un état (ρ_d, u_d) peut être relié via un choc à un état (ρ_g, u_g), alors il peut être relié à un deuxième état différent. Ceci n'est pas compatible avec l'expérience et une des deux solutions sera exclue par l'étude de l'évolution de l'entropie du système.

Une fonction $\eta : G \to I\!R$ est dite entropie du système (2.1) s'il existe une fonction $\psi : G \to I\!R$ (dite flux de l'entropie η) telle que

$$d\eta(v)df(v) = d\psi(v), \ \forall v \in G. \tag{2.13}$$

Montrons alors le résultat.

Théorème 2 *On suppose que G est simplement connexe. Une fonction $\eta \in \mathcal{C}^2(G, I\!R)$ est une entropie de (2.1) si et seulement si la "matrice" $d^2\eta(v).df(v)$ est symétrique.*

Démonstration Suppposons que (2.13) a lieu et différencions (2.13), il vient

$$d^2\eta(v)df(v) + d\eta(v).d^2f(v) = d^2\psi(v) \tag{2.14}$$

Puisque les matrices $d\eta(v).d^2f(v)$ et $d^2\psi(v)$ sont symmétriques, la matrice $d^2\eta(v)df(v)$ est symmétrique. Réciproquement si cette matrice est symétrique, la forme différentielle $\omega = \sum_{k,l} \frac{\partial\eta}{\partial v_k}\frac{\partial f_k}{\partial v_l} dv_l$ est fermée ($d\omega = 0$). L'ouvert G étant simplement connexe, ω peut être intégrée $\omega = d\psi$ et alors (2.13) a lieu.

Ainsi le problème de l'existence d'une entropie revient à résoudre un système linéaire

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2\eta}{\partial v_k \partial v_l}\frac{\partial f_k}{\partial v_m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2\eta}{\partial v_k \partial v_m}\frac{\partial f_k}{\partial v_l}, 1 \leqslant m < l \leqslant k \tag{2.15}$$

de $\frac{m(m-1)}{2}$ équations aux dérivées partielles pour la fonction $\eta(v_1, ..., v_m)$.

Lorsque $m = 1$, il n'y a aucune condition : toute fonction η est une entropie. Lorsque $m = 2$, il y a <u>une</u> équation

$$\frac{\partial f_1}{\partial v_2}\frac{\partial^2\eta}{\partial v_1 \partial v_1} + \frac{\partial f_2}{\partial v_2}\frac{\partial^2\eta}{\partial v_2 \partial v_1} = \frac{\partial f_1}{\partial v_1}\frac{\partial^2\eta}{\partial v_1 \partial v_2} + \frac{\partial f_2}{\partial v_1}\frac{\partial^2\eta}{\partial v_2 \partial v_2} \tag{2.16}$$

qui possède un espace vectoriel de dimension infinie de solutions η.

Lorsque $m \geqslant 3, \frac{m(m-1)}{2} \geqslant 2$, il y a donc trop d'équations pour une seule inconnu η et (2.15) ne possède en général pas de solution autre que les solutions affines $\eta(v) = Mv + c$.

Toutefois les systèmes du type (2.1) provenant de la physique possèdent en général une entropie η qui est de plus une fonction strictement convexe.
Exemple 2.1 (suite). Introduisons les fonctions f et g en prenant

$$f''(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho^2}, \tag{2.17}$$

$$g(\rho) = \rho f'(\rho). \tag{2.18}$$

On vérifie alors que

$$\eta(\rho, \rho u) = \frac{u^2}{2} + f(\rho), \tag{2.19}$$

$$\psi(\rho, \rho u) = \frac{u^3}{3} + g(\rho)u \tag{2.20}$$

est un couple entropie-flux et que $p'(\rho) > 0$ assure que la fonction η est stictement convexe :

$$\sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial v_k \partial v_l} \xi_k \xi_l > 0 \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}. \tag{2.21}$$

Lorsque v est une solution régulière de (2.1), la relation (2.13) entraine immédiatement que

$$\frac{\partial \eta(v)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(v)}{\partial x} = 0. \tag{2.22}$$

D'autre part si v, ayant la structure (2.6), est solution faible de (2.22), on vérifie comme pour (2.9) que

$$[\psi(v)](t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}[\eta(v)](t). \tag{2.23}$$

Mais en général (2.9) et (2.23) sont incompatibles : (2.1) et (2.22) ne peuvent être satisfaites simultanément. Dans le cas de systèmes issus de la physique, le second principe (c'est $-\eta$ qui joue le rôle d'entropie physique) permet d'affirmer qu'en présence de discontinuités, on aura au lieu de (2.22) :

$$\frac{\partial \eta(v)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(v)}{\partial x} \leqslant 0. \tag{2.24}$$

Montrer (2.24), dans le cas général, est un problème ouvert à ce jour. On peut toutefois obtenir cette inégalité en supposant que “la” bonne solution de (2.1) s'obtient par passage à la limite sur un problème “visqueux” lorsque le paramètre de viscosité tend vers zéro. Précisons légèrement ce point. Soit $D(v)$ une matrice de diffusion pour la métrique induite par $\nabla^2\eta$:

$$\sum_{i,j,k=1}^{m} D_{i,j}(v)\frac{\partial^2 \eta(v)}{\partial v_j \partial v_k}\xi_i\xi_k \geqslant 0, \ \ \forall \xi \in I\!R^m, \ \forall v \in G, \tag{2.25}$$

et considérons au lieu de (2.1), le système

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial f(v^\varepsilon)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(D(v^\varepsilon)\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}). \tag{2.26}$$

Exemple 2.1 (suite) Si nous prenons la viscosité de Navier-Stokes nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u^2 + p(\rho))}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{array}\right. \tag{2.27}$$

et alors $D(v)\xi = (0, -\frac{v_2}{v_1^2}\xi_1 + \frac{1}{v_1}\xi_2)$ vérifie bien (2.25) :

$$(D(v)\xi, \nabla^2\eta(v)\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_2}{v_1} - \frac{v_2\xi_1}{v_1^2}\right)^2 \geqslant 0. \tag{2.28}$$

Faisons donc l'hypothèse que la solution faible de (2.1) que nous voulons sélectionner est limite de solutions régulières de (2.26). Multiplions alors cette équation par $\nabla\eta(v^\varepsilon)$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(v^\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(v^\varepsilon)}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(D(v^\varepsilon)\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}\nabla\eta(v^\varepsilon)\right) \\ &- \left(\nabla^2\eta(v^\varepsilon)\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}, D(v^\varepsilon)\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ainsi sous l'hypothèse (2.25),

$$\frac{\partial \eta(v^\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(v^\varepsilon)}{\partial x} \leqslant \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(D(v^\varepsilon)\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}\nabla\eta(v^\varepsilon)\right). \tag{2.30}$$

Dans le cas où sur chaque compact K de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, nous avons pour un certain $\varepsilon_0 > 0$,

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\left(\int_K\left|\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}\right|dxdt+\sup_{(x,t)\in K}|v^\varepsilon(x,t)|\right)\leqslant C(K)<\infty, \tag{2.31}$$

il est possible de montrer qu'une valeur d'adhérence de la suite (v^ε) vérifie (2.24) à la limite $\varepsilon\to 0$. Noter que (2.31) est bien compatible avec le fait que v soit discontinu. Etablir (2.31) est un problème ouvert à ce jour.

Ainsi v ayant la structure (2.6) sera solution faible de (2.22) si

$$\left[\psi(v)\right](t)\leqslant\frac{d\sigma(t)}{dt}\left[\eta(v)\right](t). \tag{2.32}$$

Cette condition, dans le cas d'une solution avec discontinuité sur la droite $\sigma(t) = \xi + st$ s'écrira

$$\psi(v_d)-\psi(v_g)\leqslant s(\eta(v_d)-\eta(v_g)). \tag{2.33}$$

Exemple 2.1 (suite). Nous avons donc ici

$$\begin{aligned}&g(\rho_g)u_g+\frac{u_g^3}{3}-g(\rho_d)u_d-\frac{u_d^3}{3}\leqslant\\&\frac{\rho_g u_g-\rho_d u_d}{\rho_g-\rho_d}\left(\frac{u_g^2}{2}+f(\rho_g)-\frac{u_d^2}{2}-f(\rho_d)\right)\end{aligned} \tag{2.34}$$

où u_g et u_d sont reliés par une des deux solutions (2.12). En utilisant la formulation lagrangienne plutôt que l'eulérienne utilisée ici, on obtient sous l'hypothèse supplémentaire que $\tau\mapsto p(1/\tau)$ est une fonction convexe, que une seule des deux relations (2.12) est compatible avec (2.34) :

$$\begin{aligned}&\text{si } \rho_g\geqslant\rho_d \quad \text{alors} \quad u_g\geqslant u_d : u_g-u_d=\sqrt{(p_g-p_d)(\tfrac{1}{\rho_d}-\tfrac{1}{\rho_g})},\\&\text{si } \rho_g\leqslant\rho_d \quad \text{alors} \quad u_g\leqslant u_d : u_g-u_d=-\sqrt{(p_g-p_d)(\tfrac{1}{\rho_d}-\tfrac{1}{\rho_g})}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Application aux gaz parfaits. Dans ce cas $p(\rho) = A\rho^\gamma$ avec $\gamma > 0$.
On a $f(\rho) = \frac{A\gamma}{(\gamma-1)(\gamma-2)}\rho^{\gamma-1}, g(\rho) = \frac{A\gamma\rho^{\gamma-1}}{\gamma-2}$ pour $\gamma\notin\{1,2\}$.
Pour $\gamma = 2, f(\rho) = 2A(\rho \text{ Log } -\rho), g(\rho)$
$= 2A\rho \text{ Log } \rho;$ pour $\gamma = 1, f(\rho) = -A \text{ Log } \rho, g(\rho) = -A.$ (2.36)

2.3 Ondes de raréfaction

Si nous nous plaçons dans le cas du p-système avec

$$v_0(x) = \begin{cases} (\rho_g, \rho_g u_g) & \text{pour } x < \xi \\ \\ (\rho_d, \rho_d u_d) & \text{pour } x > \xi, \end{cases} \tag{2.37}$$

avec $\rho_g > \rho_d$ et $u_g - u_d = -\sqrt{(p_g - p_d)(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_d})}$ vérifiant donc les conditions de Rankine-Hugoniot (2.11); nous avons vu que bien que $v(x,t) = v_0(x - st), s = \frac{\rho_g u_g - \rho_d u_d}{u_g - u_d}$, soit solution faible de (2.1) - (2.2) elle ne vérifie pas la condition d'entropie (2.34).

Nous allons, pour décrire la solution dans ce cas, introduire une nouvelle famille de solutions : les ondes de raréfaction (appelées dans le contexte précédant, détentes).

Il s'agit de solutions de (2.1) et (2.3) de la forme (solution autosimilaire) :

$$v(x,t) = w\left(\frac{x - \xi}{t}\right), \tag{2.38}$$

où w est une fonction régulière. Si nous substituons (2.38) dans (2.1), il vient :

$$(df(w(\sigma)) - \sigma)\frac{dw}{d\sigma}(\sigma) = 0. \tag{2.39}$$

Il est alors légitime de chercher *a priori* w vérifiant $\exists k \in \{1, ..., m\}$ tel que

$$\lambda_k(w(\sigma)) = \sigma, \tag{2.40}$$

$$\frac{dw}{d\sigma}(\sigma) = r_k(w(\sigma)). \tag{2.41}$$

Remarquons que (2.41) entraîne par dérivation de (2.40) :

$$\nabla\lambda_k(w(\sigma)).r_k(w(\sigma)) = \frac{d\sigma}{d\sigma} = 1 \tag{2.42}$$

et donc que sur la courbe $w(\sigma)$,

$$\nabla\lambda_k(w).r_k(w) \neq 0. \tag{2.43}$$

On dit alors que le k-ième champ est vraiment non linéaire. Dans le cas où (2.43) a lieu, quitte à changer le paramétrage σ, il est toujours possible d'imposer (2.42). Au paragraphe suivant nous reviendrons sur le cas où au lieu de (2.43) on a

$$\nabla\lambda_k(w).r_k(w) = 0,\ \forall w \in G \tag{2.44}$$

qui est le cas où le k-ième champ est linéairement dégénéré.

Ainsi w est une courbe intégrale du champ de vecteurs r_k et (2.40) montre que σ varie dans l'intervalle

$$[\lambda_k(v_g), \lambda_k(v_d)]\,, \tag{2.45}$$

et que

$$w(\lambda_k(v_g)) = v_g, w(\lambda_k(v_d)) = v_d. \tag{2.46}$$

Ainsi v_g et v_d doivent être sur la même courbe intégrale $(\sigma, w(\sigma))$ du vecteur r_k et $\lambda_k(w(\sigma))$ doit croître de $\lambda_k(v_g)$ à $\lambda_k(v_d)$.

Si cette condition est remplie, la structure v solution de (2.1) et (2.3) ainsi construite est la suivante

$$v(x,t) = \begin{cases} v_g \text{ pour } x-\xi \leqslant \lambda_k(v_g)t, \\ \\ w((x-\xi)/t) \text{ pour } \lambda_k(v_g) \leqslant x-\xi \leqslant \lambda_k(v_d)t, \\ \\ v_d \text{ pour } x-\xi \geqslant \lambda_k(v_d)t. \end{cases} \tag{2.47}$$

Une solution de cette forme est appelée k-onde de raréfaction.

Exemple 2.1 (suite). Ici nous avons $v = (\rho, \rho u), \lambda_1 = u - c(\rho), \lambda_2 = u + c(\rho)$ où $c(\rho) = \sqrt{p'(\rho)}; r_1 = (1, u-c), r_2 = (1, c+u)$. La condition (2.43) s'écrit $c' + \frac{c}{\rho} \neq 0$ (ou $\rho p''(\rho) + 2p'(\rho) \neq 0$) et revient à l'hypothèse que $\tau \mapsto p(1/\tau)$ est strictement convexe. Etudions le cas $k = 1$. Puisque notre choix pour r_1 n'entraine pas (2.42), nous prenons au lieu de (2.41),

$$\frac{dw}{d\sigma}(\sigma) = \alpha(\sigma) r_1(w(\sigma)). \tag{2.48}$$

En utilisant (2.40), il vient alors

$$\alpha = -\frac{w_1}{c(w_1) + w_1 c'(w_1)}, \tag{2.49}$$

de sorte que

$$\frac{dw_1}{d\sigma} = -\frac{w_1}{c(w_1) + w_1 c'(w_1)}. \tag{2.50}$$

Puisque $\rho \mapsto c(\rho) + \rho c'(\rho)$ ne s'annule pas, nous pouvons supposer que cette fonction est strictement positive (sinon changer σ en $-\sigma$ et c en $-c$). Ainsi w_1 décroit lorsque σ croit. Si nous voulons relier un état $(\rho_g, \rho_g u_g)$ à un état $(\rho_d, \rho_d u_d)$, nous voyons que nécessairement $\rho_g < \rho_d$ si cela se fait le long des σ croissant. Il faut aussi que $\lambda_1(\rho_g, \rho_g u_g) < \lambda_1(\rho_d, \rho_d u_d)$ c'est à dire

$$u_g - c(\rho_g) < u_d - c(\rho_d)$$

soit

$$u_g - u_d < c(\rho_g) - c(\rho_d) \tag{2.51}$$

et puisque $\rho_g < \rho_d$, forcément $u_g < u_d$ (cette condition est nécessaire mais pas suffisante).

Etudions le cas $k = 2$. Cela revient à changer c en $-c$ et donc $\rho_d > \rho_g$ et $u_g + c(\rho_g) < u_d + c(\rho_d)$. Ainsi $u_g - u_d < c(\rho_d) - c(\rho_g)$, ce qui n'entraine rien sur le signe de $u_g - u_d$.

Application aux gaz parfaits. Pour $p(\rho) = A\rho^\gamma$, on a $c(\rho) = \sqrt{\gamma A}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ (2.52)

et (2.48) s'intègre en

$$\sqrt{\gamma A}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\sigma = \text{ constante }. \tag{2.53}$$

D'autre part (2.40) s'écrit

$$u - \sqrt{\gamma A}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = \sigma. \tag{2.54}$$

Ainsi deux états $(\rho_g, \rho_g u_g)$ et $(\rho_d, \rho_d u_d)$ peuvent être reliés par une 1-onde de raréfaction si et seulement si

$$\frac{2\sqrt{\gamma A}}{1+\gamma}\rho_g^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_g = \frac{2\sqrt{\gamma A}}{1+\gamma}\rho_d^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_d. \tag{2.55}$$

De même ces états pourront être reliés par une 2-onde de raréfaction si et seulement si

$$-\frac{2\sqrt{\gamma A}}{1+\gamma}\rho_g^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_g = -\frac{2\sqrt{\gamma A}}{1+\gamma}\rho_d^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_d. \tag{2.56}$$

2.4 Discontinuité de contact

Dans le cas où l'un des champs propres est linéairement dégénéré, c'est à dire vérifie (2.44) :

$$\nabla \lambda_k(v).r_k(v) = 0, \quad \forall v \in G,$$

nous allons construire une nouvelle solution faible de (2.1) et (2.3). Nous aurons une solution de la forme

$$v(x,t) = \begin{cases} v_g & \text{pour} \quad x - \xi < st, \\ \\ v_d & \text{pour} \quad x - \xi > st. \end{cases} \tag{2.57}$$

Résolvons pour cela la courbe intégrale de r_k :

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{d\sigma} = r_k(w(\sigma)), \\ w(0) = u_g. \end{cases} \tag{2.58}$$

On vérifie alors que pour tout σ pour lequel la solution de (2.57) est bien définie, (2.56) est solution de (2.1) et (2.3) lorsque $s = \lambda_k(v_g)$ et $u_d = w(\sigma)$. Remarquons que (2.44) entraine que λ_k est constant le long de la solution de (2.57) et ainsi $\lambda_k(v_d) = \lambda_k(w(\sigma)) = \lambda_k(u_g)$. La solution (2.56) est une discontinuité qui se propage à la vitesse $s = \lambda_k(v_g) = \lambda_k(v_d)$.

Examinons la condition d'entropie (2.33). A cet effet, calculons (en utilisant (2.44))

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma}\left[\psi(w(\sigma)) - \lambda_k(w(\sigma))\eta(w(\sigma))\right] = \left[\nabla\psi(w) - \lambda_k \nabla_\eta(w)\right]\frac{dw}{d\sigma} = \\ &= \left(\nabla_\eta(w) df(w) - \lambda_k(w)\nabla_\eta(w)\right) r_k(w) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\psi(w(\sigma)) - \lambda_k(w(\sigma))\eta(w(\sigma)) = \psi(v_g) - s\eta(v_g)$ et donc (2.33) est satisfaite sous forme d'égalité.

Exemple 2.2 Le p-système. Considérons un fluide dont la thermodynamique est décrite par une loi $p = p(\rho, s)$, ρ densité et s entropie spécifique. Les équations de bilan de masse, quantité de mouvement et énergie s'écrivent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\varepsilon + pu) = 0, \tag{2.61}$$

où $\varepsilon = e + \frac{1}{2}u^2$ est l'énergie spécifique, $e = e(\rho, s)$ l'énergie interne. Dans le cas où la loi d'état s'écrit $p = (\gamma - 1)\rho e$ (nous traiterons le cas général au paragraphe 3) c'est à dire des gaz polytropiques, avec $\gamma > 1$; on vérifie que les valeurs propres sont $u - c, u$ et $u + c$ avec $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ et que le second champ est linéairement dégénéré : $\nabla\lambda_2(v).r_2(v) \equiv 0$. On peut prendre $r_2(v) = (1, u, \frac{1}{2}u^2)$ de sorte que (2.57) devient dans ce cas

$$\frac{dw_1}{d\sigma} = 1, \ \ \frac{dw_2}{d\sigma} = \frac{w_2}{w_1}, \ \ \frac{dw_3}{d\sigma} = \frac{1}{2}\frac{w_2^2}{w_1^2}. \tag{2.62}$$

Ces équations s'intègrent pour donner

$$\begin{aligned} &w_1(\sigma) = w_{1g} + \sigma, w_2(\sigma) = w_{2g} + \frac{w_{2g}}{w_{1g}}\sigma, \\ &w_3(\sigma) = w_{3g} + \frac{1}{2}\left(\frac{w_{2g}}{w_{1g}}\right)^2 \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Ceci s'écrit dans les variables physiques

$$u_g = u_d = u, p_g = p_d = p, \rho_g \text{ et } \rho_d \text{ arbitraires .} \tag{2.64}$$

Ainsi (2.56) s'écrit

$$v(x,t) = \begin{cases} (\rho_g, \rho_g u, \dfrac{p}{\gamma - 1} + \dfrac{1}{2}\rho_g u^2), \text{ pour } x - \xi < ut, \\ (\rho_d, \rho_d u, \dfrac{p}{\gamma - 1} + \dfrac{1}{2}\rho_d u^2), \text{ pour } x - \xi > ut. \end{cases} \tag{2.65}$$

2.5 Profils visqueux

Revenons au système (2.26) pour lequel on cherche des solutions de la forme $v^\varepsilon(x,t) = w(\frac{x-st}{\varepsilon})$ ($s \in I\!R$ est lui aussi inconnu). On vérifie aisément qu'alors (2.26) est équivalent à :

$$(A(w) - sI)w_y = (D(w)w_y)_y\, , \tag{2.66}$$

où y décrit $I\!R$. La notion de profil visqueux correspond physiquement à la situation où l'on désire décrire une solution discontinue du système de lois de conservation (2.1) du type choc (voir (2.10)) par une solution continue qui transitionne de l'état de gauche v_g vers l'état de droite v_d sur une distance très petite ε. Dans ces conditions, il est naturel de chercher des solutions de

(2.66) qui vérifient $w_y \to 0$ lorsque $y \to \pm\infty$. Imposons pour fixer les idées que $\int_{-\infty}^{+\infty} |w_y| dy < \infty$, de sorte qu'il existe deux vecteurs, notés v_g et v_d qui sont tels que $v_g = \lim\limits_{y \to -\infty} w(y)$ et $v_d = \lim\limits_{y \to +\infty} w(y)$. Puisque $(A(w) - sI) w_y = (f(w) - sw)_y$, on déduit de (2.66) que :

$$f(w) - f(v_g) - s(w - v_g) = f(w) - f(v_d) - s(w - v_d) = D(w) w_y \,, \tag{2.67}$$

et que forcément (2.10) a lieu. Réciproquement, étant donné un triplet (v_g, v_d, s) vérifiant (2.10), si w est solution de l'équation différentielle :

$$D(w) w_y = f(w) - f(v_g) - s(w - v_g) \,, \tag{2.68}$$

avec les conditions aux limites $\lim\limits_{y \to -\infty} w(y) = v_g$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} w(y) = v_d$, alors $v^\varepsilon(x,t) = w(\frac{x - st}{\varepsilon})$ est solution de (2.26). Lorsque la matrice $D(w)$ est inversible, (2.68) est une équation différentielle résolue et la recherche de profils visqueux est, en langage des systèmes dynamiques, la recherche d'orbites hétéroclines pour l'équation différentielle :

$$w_y = D(w)^{-1} \left(f(w) - f(v_g) - s(w - v_g) \right) \,, \tag{2.69}$$

reliant les deux points critiques v_g et v_d.
Par contre, lorsque la matrice $D(w)$ n'est pas inversible, et il en est très souvent ainsi en mécanique des fluides où l'équation de conservation de la masse ne contient pas de termes visqueux, (2.68) est le couplage d'une équation algébrique :

$$f(w) - f(v_g) - s(w - v_g) \in \mathrm{Image}(D(w)) \,, \tag{2.70}$$

et d'une équation différentielle. Dans les cas concrets, on tâche de paramétrer explicitement les solutions de (2.70) et on ramène là encore (2.68) à une équation différentielle résolue.

Exemple 2.1 (suite). Condidérons à nouveau le p-système (2.27) avec éventuellement une viscosité un peu plus générale :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u^2 + p(\rho))}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu(\rho) \dfrac{\partial u}{\partial x}), \end{cases} \tag{2.71}$$

où $\mu(\rho) > 0$. Dans ce cas, le système (2.68) s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = \rho u - \rho_g u_g - s(\rho - \rho_g), \\[2ex] \mu(\rho) \dfrac{\partial u}{\partial y} = \rho u^2 + p(\rho) - \rho_g u_g^2 - p(\rho_g) - s(\rho u - \rho_g u_g) \,. \end{cases} \tag{2.72}$$

La première équation est justement (2.70). On en tire, par exemple u en fonction de ρ et en reportant cette valeur dans la seconde équation, on obtient bien une équation différentielle résolue $\frac{\partial \rho}{\partial y} = F(\rho)$. Là encore une seule des deux relations (2.12) n'est possible comme il résulte d'une étude des variations et on obtient que seul le choix (2.35) donne lieu à l'existence d'un profil visqueux.

2.6 Formulations non conservatives

Examinons l'effet d'un changement de variable sur (2.1) :

$$v = \Phi(w), w = \psi(v). \tag{2.73}$$

Si v est une solution de classe C^1 et si ϕ (ou ψ) est de classe C^1, il est immédiat de vérifier que

$$\frac{\partial w}{\partial t} + B(w)\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{2.74}$$

où

$$B(w) = \nabla\phi(w)^{-1}A(\phi(w))\nabla\phi(w), \tag{2.75}$$

$$A(v) = \nabla f(v) =^t df(v) : A_{i,j}(v) = \frac{\partial f_i}{\partial v_j}(v). \tag{2.76}$$

Notons que (2.74) s'écrit aussi

$$B(w) = \nabla\psi(\phi(w))A(\phi(w))\nabla\phi(w). \tag{2.77}$$

En général, (2.73) n'est plus sous forme conservative :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial g(w)}{\partial x} = 0 \tag{2.78}$$

(il en serait ainsi si pour tout i, la matrice $\left(\frac{\partial B_{ik}}{\partial w_l}\right)_{i\leqslant k,l\leqslant m}$ était symétrique). C'est donc la forme non conservative qui est stable par difféomorphisme.

Lorsque l'on considère des solutions régulières de (2.1), il est équivalent de travailler sur (2.73). Il en sera ainsi pour les ondes de raréfactions et discontinuités de contact mais bien entendu, les ondes de choc ne sont solutions que de (2.1).

Pour des raisons calculatoires, il peut être plus interessant de travailler sur des variables non conservatives (par exemple densité, vitesse et pression en dynamique des gaz). Observons alors que (2.74) assure que les matrices $A(v)$ et $B(w)$ (avec (2.65)) ont les mêmes valeurs propres et leurs vecteurs propres se correspondent par la matrice $\nabla\psi(v)$. Plus précisément, si $\lambda(v)$ et $r(v)$ sont tels que

$$A(v)r(v) = \lambda(v)r(v), \tag{2.79}$$

alors

$$B(w)(\nabla\psi(v)r(v)) = \lambda(v)\nabla\psi(v)r(v). \tag{2.80}$$

De la même manière, lorsque l'on cherche à résoudre le problème des ondes de raréfaction, c'est à dire (2.40) - (2.41), il est équivalent de résoudre

$$\lambda_k(W(\sigma)) = \sigma, \tag{2.81}$$

$$\frac{dW}{d\sigma}(\sigma) = R_k(W(\sigma)), \tag{2.82}$$

avec $\lambda_k(W) = \lambda_k(\psi(w)), R_k(W) = \nabla\psi(w)r_k(\psi(w))$.
Il se trouve qu'un choix judicieux de ψ peut rendre (2.82) très simple à intégrer. Ces remarques restent valables pour (2.57) qui décrit les discontinuités de contact. Voir au paragraphe 3.3.2 pour une application à la dynamique des gaz.

3 Dynamique des gaz

3.1 Généralités

Considérons un fluide dont la thermodynamique est décrite par une loi $p = p(\rho, s)$ où ρ est la densité et s l'entropie spécifique. Les équations de bilan de masse, quantité de mouvement et énergie s'écrivent

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\varepsilon + pu) = 0, \tag{3.3}$$

où $\varepsilon = e + \frac{1}{2}u^2$ est la densité d'énergie et $e = e(\rho, s)$.

Il existe une fonction $T = T(\rho, s)$ (la température) telle que la forme différentielle $Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$ est la différentielle de la fonction e :

$$Tds = de - \frac{p}{\rho^2}d\rho. \tag{3.4}$$

Notons alors $v = (\rho, \rho u, \rho\varepsilon)$ les variables conservatives pour (3.1) de sorte que p peut aussi être vue comme une fonction de v. Calculons les $\frac{\partial p}{\partial v_i}$ qui interviennent dans le calcul de la matrice jacobienne du système (3.1) - (3.3). A cet effet, notons

$$p_\rho = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s), \quad p_s = \frac{\partial p}{\partial s}(\rho, s). \tag{3.5}$$

Nous avons $e = \frac{v_3}{v_1} - \frac{v_2^2}{2v_1^2}$ de sorte que (3.4) entraine

$$T ds = \left(\frac{v_2^2}{v_1^3} - \frac{p + v_3}{v_1^2} \right) dv_1 - \frac{v_2}{v_1} dv_2 + \frac{1}{v_1} dv_3. \tag{3.6}$$

Puis en écrivant $dp = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial p}{\partial v_i} dv_i = p_\rho d_\rho + p_s ds$, il vient

$$\frac{\partial p}{\partial v_1} = p_\rho + \frac{1}{T\rho}(\frac{1}{2}u^2 - e - \frac{p}{\rho})p_s, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_2} = -\frac{u}{\rho T} p_s, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_3} = \frac{1}{\rho T} p_s. \tag{3.9}$$

Ainsi la matrice jacobienne $A(v) =^t df(v)$ s'écrit

$$A(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K - u^2 & (2-k)u & k \\ u(K-H) & H - ku^2 & (1+k)u \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} k &= \tfrac{1}{\rho T} \left(\tfrac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho, H = e + \tfrac{p}{\rho} + \tfrac{u^2}{2}, \\ K &= c^2 + k(u^2 - H), c = \sqrt{\left(\tfrac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Rappelons que le second principe entraine que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho > 0, \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s > 0. \tag{3.12}$$

Les valeurs propres de $A(v)$ sont

$$\lambda_1(v) = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \tag{3.13}$$

et on peut prendre comme vecteurs propres associés :

$$r_1(v) = (1, u - c, H - uc), \tag{3.14}$$

$$r_2(v) = (1, u, H - c^2/k), \tag{3.15}$$

$$r_3(v) = (1, u + c, H + uc). \tag{3.16}$$

La base duale (vecteurs propres de $df(u)$) est alors :

$$l_1(v) = \frac{1}{2c^2}(K + uc, -ku - c, k), \tag{3.17}$$

$$l_2(v) = \frac{k}{c^2}(H - u^2, u, -1), \tag{3.18}$$

$$l_3(v) = \frac{1}{2c^2}(K - uc, -ku + c, k). \tag{3.19}$$

Le second champ est linéairement dégénéré :

$$\nabla_v \lambda_2(v) = \nabla_v u = \nabla_v \left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \left(-\frac{v_2}{v_1^2}, \frac{1}{v_1}, 0\right) = \frac{1}{\rho}(-u, 1, 0)$$

est constamment orthogonal à $r_2(v)$:

$$\nabla \lambda_2(v).r_2(v) = 0. \tag{3.20}$$

L'équation différentielle associée aux discontinuités de contact est alors

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = 1, \frac{du}{d\sigma} = 0, \rho^2 \frac{de}{d\sigma} = p - c^2/k. \tag{3.21}$$

Entropie mathématique pour le p-système.

Nous avons considéré la loi d'état sous la forme $p = p(\rho, s)$. Dans ce paragraphe nous prenons le parti d'inverser cette relation sous la forme $s = s(\tau, e)$ où $de = Tds - pd\tau, \tau = 1/\rho$. Le second principe de la thermodynamique entraine alors que

$$\text{la fonction } (\tau, e) \mapsto s(\tau, e) \text{ est strictement convexe .} \tag{3.22}$$

On montre alors (voir Godlewski-Raviart [4]) que cette propriété est équivalente à

$$v \mapsto \eta(v) = -v_1 s(1/v_1, (v_3 - \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{v_1^3})v_1) \text{ est strictement convexe .} \tag{3.23}$$

Calculons alors $\frac{\partial \eta(v)}{\partial t}$ pour des solutions régulières de (3.1) - (3.3). Puisque $\eta(v) = \rho\tilde{s}(\rho, e)$ avec $\tilde{s}(\rho, e) \equiv s(1/\rho, e)$, il vient

$$\frac{\partial \eta(v)}{\partial t} + \frac{\partial(\eta(v)u)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho\tilde{s})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\tilde{s})}{\partial x} = \rho\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} + \rho u\frac{\partial \tilde{s}}{\partial x}. \tag{3.24}$$

D'autre part $Td\tilde{s} = de + pd(1/\rho)$ et donc

$$\begin{aligned}
&\rho^T\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} + T_\rho u\frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + p\frac{\partial(1/\rho)}{\partial t}\right) + \rho u\left(\frac{\partial e}{\partial x} + p\frac{\partial(1/\rho)}{\partial x}\right) = \\
&= \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u e)}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial x} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi revenant à (3.24) on a

$$\frac{\partial \eta(v)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(v)}{\partial x} = 0 \tag{3.25}$$

où

$$\psi(v) = -v_2 s(1/v_1, (v_3 - \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{v_1^3})/v_1)). \tag{3.26}$$

La fonction $-\rho s$ est donc une entropie strictement convexe pour $(3.1) - (3.2)$, associée au flux $-\rho u s$. (3.27)

3.2 Applications aux gaz parfaits

Dans ce cas, la loi d'état s'écrit

$$p = p(\rho, s) = K\rho^{\gamma} \exp \frac{(\gamma-1)s}{R}, \tag{3.28}$$

où R est la constante des gaz parfaits, $\gamma > 1$ et K deux constantes. Ici

$$T = \frac{p}{R\rho}, e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}, c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}, K = \frac{\gamma-1}{2}u^2, k = \gamma - 1. \tag{3.29}$$

La matrice $A(v)$ vaut avec $H = \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}$

$$A(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ u\left(\frac{\gamma-1}{2}u^2 - H\right) & H-(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Les éléments propres sont

$$r_1(v) = (1, u-c, H-uc),$$

$$r_2(v) = (1, u, H - \frac{c^2}{\gamma-1}),$$

$$r_3(v) = (1, u+c, H+uc),$$

$$l_1(v) = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\gamma-1}{2}u^2 + uc, -(\gamma-1)u - c, \gamma-1\right),$$

$$l_2(v) = \frac{\gamma-1}{c^2}\left(H-u^2, u, -1\right),$$

$$l_3(v) = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\gamma-1}{2}u^2 - uc, c-(\gamma-1)u, \gamma-1\right).$$

L'entropie mathématique $\eta(v)$ et son flux sont donnés par les expressions

$$\eta(v) = -\rho \text{ Log } (p/\rho^{\gamma}), \tag{3.31}$$

$$\psi(v) = -\rho u \text{ Log } (p/\rho^{\gamma}), \tag{3.32}$$

et le long des solutions faibles de (3.1) à (3.3) nous exigerons que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \text{ Log } (p/\rho^{\gamma})) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \text{ Log } (p/\rho^{\gamma})) \geqslant 0. \tag{3.33}$$

Comme nous l'avons déjà observé, les discontinuités de contact sont des solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}(x,t) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_g \\ \bar{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix} \text{ pour } x < ut, \begin{pmatrix} \rho_d \\ \bar{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix} \text{ pour } x > ut \right. \tag{3.34}$$

où $\rho_g, \rho_d, \bar{u}$ et $\bar{p}$ sont des constantes arbitraires. En fait ces solutions sont des cas particuliers d'une famille plus générale de solution :

$$(\rho, u, p)(x,t) = (\rho_0(x - \bar{u}t), \bar{u}, \bar{p}) \tag{3.35}$$

où $\bar{u}$ et $\bar{p}$ sont des constantes arbitraires et ρ_0 est une fonction quelconque.

Un modèle relativement proche du gaz parfait est celui où la loi d'état est

$$p = p(\rho, s) = K\left(\frac{\theta\rho}{1-(1-\theta)\rho/\rho_l}\right)^{\gamma} \exp\frac{(\gamma-1)s}{R} \tag{3.36}$$

(mélange “gelé” de deux fluides, l'un compressible l'autre pas). Dans ce cas, si l'on introduit la fonction de ρ : $\omega(\rho) = \frac{(\gamma-1)\rho}{\pi(\rho)^{\gamma}} \int^{\rho} \frac{\pi(\sigma)^{\gamma} d\sigma}{\sigma^2}$ où $\pi(\rho) = \frac{\theta\rho}{1-(1-\theta)\rho/\rho l}$, on obtient

$$T = \frac{\omega(\rho)p}{R\rho}, c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}\frac{\theta}{1-(1-\theta)\rho/\rho_l}, e = \frac{\omega(\rho)p}{(\gamma-1)\rho}, k = \frac{\gamma-1}{\omega(\rho)}.$$

3.3 Ecoulements multidimensionnels

3.3.1 Variables conservatives

Dans ce cas les équations s'écrivent

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0, \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div(\rho u \otimes u + p1) = 0, \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + div(\rho\varepsilon u + pu) = 0, \tag{3.39}$$

où $\varepsilon = e + \frac{1}{2}|u|^2$ et u est un vecteur de $\mathbb{R}^n, n = 1, 2$ ou 3.

Ce système a la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(v)}{\partial x_i} = 0 \tag{3.40}$$

avec $v \in \mathbb{R}^{n+2}, v = (\rho, \rho u_1, ..., \rho u_n, \rho\varepsilon)$

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \omega_i f_i(v) = \\ (\rho u.\omega, \rho(u.\omega)u_i + p\omega_1, ..., \rho(u.\omega)u_n + p\omega_n, (\rho\varepsilon + p)(u.\omega)), \forall\omega \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{3.41}$$

Le premier membre de (3.41) est noté $f(v, \omega)$ et on note $A(v, \omega)$ la matrice de $d_v f(v, \omega))$:

$$A(v, \omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i df_i(v). \tag{3.42}$$

Les valeurs propres de $A(v, \omega)$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(v, \omega) = u.\omega - |\omega|c, \\ \lambda_2(v, \omega) = ... = \lambda_{n+1}(v, \omega) = u.\omega, \\ \lambda_{n+2}(v, \omega) = u.\omega + |\omega|c. \end{array} \right. \tag{3.43}$$

Les vecteurs propres associés peuvent être pris égaux à

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1(v, \omega) = (1, u - c\omega, H - u.\omega c), \\ r_{n+2}(v, \omega) = (1, u + c\omega, H + u.\omega c), \\ r_2(v, \omega) = (1, u, H - c^2/k), \\ r_3(v, \omega) = (0, \Omega_1, u.\Omega_1), \\ r_{n+1}(v, \omega) = (0, \Omega_{n-1}, u.\Omega_{n-1}), \end{array} \right. \tag{3.44}$$

où $\Omega_1, ..., \Omega_{n-1}$ est une base orthonormale de l'hyperplan orthogonal à ω.

La base duale est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1(v, \omega) = \frac{1}{2c^2} \left(K + \frac{\omega.u}{|\omega|^2} c, -ku - \frac{\omega c}{|\omega|^2}, k \right), \\ l_{n+2}(v, \omega) = \frac{1}{2c^2} \left(K - \frac{\omega.u}{|\omega|^2} c, -ku + \frac{\omega c}{|\omega|^2}, k \right), \\ l_2(v, \omega) = \frac{k}{c^2}(H - |u|^2, u, -1) \end{array} \right. \tag{3.45}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_3(v, \omega) = (-u.\Omega_1, \Omega_1, 0), \\ l_{n+1}(v, \omega) = (-u.\Omega_{n-1}, \Omega_{n-1}, 0). \end{array} \right. \tag{3.46}$$

Ceci résulte de l'écriture de $A(v,\omega)$:

$$A(v,\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ K\omega - u.\omega u & u \otimes \omega - k\omega \otimes u + \omega.u1 & k\omega \\ (K-H)u.\omega & H\omega - k(u.\omega)u & (1+k)u.\omega \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

et la matrice $a \otimes b$ est $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j \;\; (1_{ij} = \delta_{ij})$.

3.3.2 Variables non-conservatives

Comme nous l'avons mentionné au paragraphe 2.5, il peut être judicieux de travailler en variables non conservatives.
Commençons par écrire (3.37)- (3.39) en variables $w = (\rho, u, s)$ avec s donné par (3.4). Il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u.\nabla)\rho + \rho \;\; div \;\; u = 0, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho}\nabla\rho + (u.\nabla)u + kT\nabla s = 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (u.\nabla)s = 0, \quad (3.50)$$

où rappelons que $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$, $\quad k = \frac{1}{\rho T}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho$.

Dans ce cas la matrice $B(w,\omega)$ est

$$\begin{pmatrix} u.\omega & \rho\omega & 0 \\ \frac{c^2\omega}{\rho} & u.\omega 1 & kT\omega \\ 0 & 0 & u.\omega \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Les valeurs propres sont inchangées comme il se doit :

$$\lambda_1 = u.\omega - |\omega|c, \lambda_2 = ... = \lambda_{n+1} = u.\omega, \lambda_{n+2} = u.\omega + |\omega|c,$$

alors que les vecteurs propres associés sont

$$\begin{cases} R_1(w,\omega) = (\rho, -c\omega, 0), \\ R_{n+2}(w,\omega) = (\rho, c\omega, 0), \\ R_2(w,\omega) = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho, 0, -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\right), \\ R_3(w,\omega) = (0, \Omega_1, 0), \\ R_{n+1}(w,\omega) = (0, \Omega_{n-1}, 0). \end{cases} \quad (3.52)$$

Nous pouvons aussi décider de prendre $(\rho, u, p) = \tilde{w}$ comme nouvelles variables de sorte que (3.37) - (3.39) (ou (3.48) - (3.50) s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u.\nabla)\rho + \rho \ \ div \ \ u = 0, \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2\rho \ \ div \ u + (u.\nabla)p = 0. \tag{3.55}$$

Là la matrice $\tilde{B}(\tilde{w}, \omega)$ est

$$\begin{pmatrix} u.\omega & \rho\omega & 0 \\ 0 & u.\omega 1 & \frac{\omega}{\rho} \\ 0 & c^2\rho\omega & u.\omega \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

Les valeurs propres sont toujours les mêmes (!) et les vecteurs propres s'écrivent

$$\begin{cases} \tilde{R}_1(\tilde{w}, \omega) = (1, -\dfrac{c\omega}{\rho|\omega|}, c^2), \\ \tilde{R}_{n+2}(\tilde{w}, \omega) = (1, \dfrac{c\omega}{\rho|\omega|}, c^2), \\ \tilde{R}_2(\tilde{w}, \omega) = (1, 0, 0), \\ \tilde{R}_3(\tilde{w}, \omega) = (0, \Omega_1, 0), \\ \tilde{R}_{n+1}(\tilde{w}, \omega) = (0, \Omega_{n-1}, 0). \end{cases} \tag{3.57}$$

3.4 Résolution du problème de Riemann

Plaçons nous dans le cas monodimensionnel, dans le cas des gaz parfaits polytropiques. Les équations sont (3.1) - (3.3) avec la loi d'état (3.28) ce qui conduit aux relations (3.29).

Nous cherchons à résoudre (3.1) - (3.3) avec un état initial

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_g, u_g, p_g) \text{ pour } x < 0, \\ (\rho_d, u_d, p_d) \text{ pour } x > 0. \end{cases} \tag{3.58}$$

Pour cela nous dirons que une solution de (3.1) - (3.3) est admissible si elle est constituée d'un nombre fini d'états constants séparés soit par une détente, soit par une discontinuité de contact soit par un choc et si c'est une solution faible entropique. Avec cette définition on a le résultat suivant

Théorème 3 *(Smoller [3]) : Il existe une solution admissible du problème de Riemann (3.1)-(3.3) avec la loi d'état (3.28) et la donnée initiale (3.58) si et seulement si*

$$u_d - u_g < \frac{2}{\gamma - 1}\left(\sqrt{\gamma\frac{p_d}{\rho_d}} + \sqrt{\gamma\frac{p_g}{\rho_g}}\right). \tag{3.59}$$

De plus cette solution est unique dans la classe des solutions admissibles.

Remarque Si la condition (3.59) est violée, il se crée une région où ρ s'annule identiquement (vide).

Nous allons dans ce qui suit construire la solution en question. Nous aurons typiquement deux cas (symétriques). Dans le premier la solution a la structure suivante. Tout d'abord on passe de $(\rho_g u_g p_g)$ à (ρ_g^*, u^*, p^*) par une 1-onde de détente, puis de (ρ_g^*, u^*, p^*) à (ρ_d^*, u^*, p^*) par une discontinuité de contact, enfin de (p_d^*, u^*, p^*) à (ρ_d, u_d, p_d) par une 3-onde de choc. Dans le second cas on commence par un 1-choc et on termine par une 3-détente. C'est la condition d'entropie qui interdit de commencer par une 3-onde (en général).

3.4.1 Ondes de choc

Si l'on souhaite relier deux états (ρ_d, u_d, p_d) et (ρ_g, u_g, p_g) à droite et à gauche par une onde de choc qui satisfasse la condition d'entropie, on a deux cas possibles.

(i) Si $p_d > p_g$ alors il s'agit d'une 1-onde de choc et cela est possible si pour un certain $x \leqslant 0$:

$$\begin{cases} p_d = e^{-x} p_g, \\ \rho_d = \dfrac{e^x + \beta}{1 + \beta e^x}\rho_g, \beta = \dfrac{1+\gamma}{\gamma - 1}, \\ u_d - u_g = c_g \dfrac{2\sqrt{\tau}}{\gamma - 1}\dfrac{1 - e^{-x}}{\sqrt{1 + \beta e^{-x}}}, \tau = \dfrac{\gamma - 1}{2\gamma}, c_g = \sqrt{\dfrac{\gamma p_g}{\rho_g}}. \end{cases} \tag{3.60}$$

(ii) Si $p_g > p_d$ alors il s'agit d'une 3-onde de choc et cela est possible si pour un certain $x \leqslant 0$:

$$\begin{cases} p_d = e^{x} p_g, \\ \rho_d = \dfrac{e^{-x} + \beta}{1 + \beta e^{-x}}\rho_g, \\ u_d - u_g = c_g \dfrac{2\sqrt{\tau}}{\gamma - 1}\dfrac{e^{x} - 1}{\sqrt{1 + \beta e^{x}}}. \end{cases} \tag{3.61}$$

3.4.2 Ondes de raréfaction (détentes)

Si on souhaite relier deux états par une détente on a deux cas possibles.

(i) Si $p_d < p_g$ alors il s'agit d'une 1-onde de raréfaction et cela est possible si pour un certain $x \geqslant 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_d = p_g e^{-x}, \\ \rho_d = \rho_g e^{-\frac{x}{\gamma}}, \\ u_d - u_g = c_g \dfrac{2}{\gamma - 1}(1 - e^{-\tau x}). \end{array} \right. \tag{3.62}$$

(ii) Si $p_d > p_g$ alors il s'agit d'une 3-onde de raréfaction et cela est possible si pour un certain $x \geqslant 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_d = p_g e^{x}, \\ \rho_d = \rho_g e^{\frac{x}{\gamma}}, \\ u_d - u_g = c_g \dfrac{2}{\gamma - 1}(e^{\tau x} - 1) \end{array} \right. \tag{3.63}$$

3.4.3 Discontinuités de contact

Dans ce cas seule la densité présente un choc et donc il suffit que pour un certain $x \in I\!R$:

$$p_d = p_g, \rho_d = \rho_g e^{x}, u_d = u_g. \tag{3.64}$$

3.4.4 Construction de la solution du problème de Riemann

On se donne deux états (ρ_g, u_g, p_g) et (ρ_d, u_d, p_d) vérifiant la condition (3.59).

Soit alors $h(x), x \in I\!R$ la fonction

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2}{\gamma - 1}(1 - e^{-\tau x}), x \geqslant 0, \\ \dfrac{2\sqrt{\tau}}{\gamma - 1}\dfrac{1 - e^{-x}}{\sqrt{1 + \beta e^{-x}}}, x \leqslant 0. \end{array} \right. \tag{3.65}$$

On introduit alors les trois nombres

$$A = \frac{\rho_d}{\rho_g}, B = \frac{p_d}{p_g}, C = \frac{u_d - u_g}{c_g}. \tag{3.66}$$

On commence par résoudre l'équation

$$h(x_1) + \sqrt{\frac{B}{A}} h(x_1 + LogB) = C. \tag{3.67}$$

La condition (3.59), qui s'écrit

$$\frac{2}{\gamma - 1}\left(1 + \sqrt{\frac{B}{A}}\right) > C, \tag{3.68}$$

et le fait que h est strictement croissante assurent que (3.67) possède une et une seule solution.

Puisque l'on dispose de x_1, on peut prendre

$$x_3 = x_1 + LogB. \tag{3.69}$$

Enfin on pose

$$x_2 = LogA + Logf(x_3) - Logf(x_1) \tag{3.70}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{\gamma}} \text{ si } x \geqslant 0, \\ \dfrac{\beta + e^x}{1 + \beta e^x} \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.71}$$

La solution du problème de Riemann est alors une 1-onde de paramètre x_1 (onde de choc si $x_1 < 0$, détente si $x_1 > 0$), puis une discontinuité de contact de paramètre x_2, puis une 3-onde de paramètre x_3 (onde de choc si $x_3 < 0$, détente si $x_3 > 0$).

Résumons donc cette résolution. On suppose (3.59).

(1er cas) $p_d > p_g$

(i) si

$$\frac{2}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{p_g}{p_d}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right) > \sqrt{\frac{\rho_d}{\gamma p_d}}(u_d - u_g),$$

On a une 1-détente de paramètre $x_1 > 0$ puis une discontinuité de contact de paramètre x_2 puis un 3-choc de paramètre $x_3 < 0$.

(ii) si

$$\frac{2}{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{p_g}{p_d}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right) < \sqrt{\frac{\rho_d}{\gamma p_d}}(u_d-u_g),$$

on a un 1-choc de paramètre $x_1 < 0$ puis une discontinuité de contact de paramètre x_2 puis une 3-détente de paramètre $x_3 > 0$.

(2ème cas) $p_d < p_g$.

(i) si

$$\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\frac{1-\frac{p_g}{p_d}}{\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_g}{p_d}}} > (u_d-u_g)\sqrt{\frac{\rho_d}{p_d}}$$

1-détente de paramètre $x_1 > 0$, discontinuité de contact, pour 3-choc.

(ii) si

$$\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\frac{1-\frac{p_g}{p_d}}{\sqrt{1+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_g}{p_d}}} < (u_d-u_g)\sqrt{\frac{\rho_d}{p_d}},$$

1-choc de paramètre $x_1 < 0$, discontinuité de contact puis 3-détente.

Références

[1] J.M. Ghidaglia, Une approche volumes finis pour la résolution des systèmes hyperboliques de lois de conservation. Note EDF/DER/TTA, HT-30/95/016A.

[2] G. Le Coq, Volume fini colocalisé, une méthode pour construire des schémas numériques explicites et implicites. Note EDF/DER/TTA, HT-33/94/030/A.

[3] J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations. Springer-Verlag, New-York, 1983.

[4] E. Godlewski et P.A. Raviart, Numerical analysis for hyperbolic systems of conservation laws, Springer-Verlag, New-York, 1995.